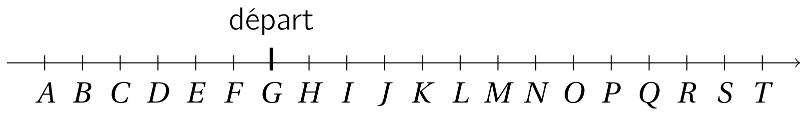
Chapitre 9 : Addition et soustraction de nombres relatifs

Introduction

Une tortue mécanique se déplace sur une droite en suivant deux instructions : AV pour avance et RE pour recule.



On lui fait subir les programmes suivants, pour chacun indiquer la lettre à l'arrivée :

P_1 : AV(4) puis AV(2) : lettre M

P_2 : AV(5) puis RE(2) : lettre I

P_3 : RE(6) puis AV(3) : lettre D

P_4 : RE(1) puis RE(5) : lettre A

En observant le lettre d'arrivée remplacer chaque programme par une seule instruction :

P_1 : AV(4) puis AV(2) revient à AV(6)

P_2 : AV(5) puis RE(2) revient à AV(3)

P_3 : RE(6) puis AV(3) revient à RE(3)

P_4 : RE(1) puis RE(5) revient à RE(6)

Réécrire les programmes en remplaçant AV par un nombre positif, RE par un nombre négatif, le mot "puis" par une addition, l'expression "revient à" par un signe égal.

P_1 : $(+4) + (+2) = (+6)$

P_2 : $(+5) + (-2) = (+3)$

P_3 : $(-6) + (+3) = (-3)$

P_4 : $(-1) + (-5) = (-6)$

1 Addition de nombres relatifs

1.1 Règle

Règle

1. Somme de deux nombres relatifs de *même signe* :
   - ☞ on garde le même signe ;
   - ☞ on additionne les distances à zéro (parties numériques).
2. Somme de deux nombres relatifs de *signe contraires*
   - ☞ on garde le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro ;
   - ☞ on soustrait les distances à zéros.

Remarque. Dans la notation précédente, le signe + sert à la fois comme marqueur du signe positif et comme marque de l'opération d'addition.

Notation

Pour noter une addition de nombres relatifs, on écrit :

✓ $(+5)+(-7)$

✓ $5+(-7)$

On n'écrit pas :

✗ $+5+-7$

Exemple :

a) $(+4)+(+14)=(+18)$

b) $(-5)+(-7)=(-12)$

c) $(-3)+(+5)=(+2)$

d) $(-36)+(+16)=(-20)$

e) $(+2)+(-3)=(-1)$

f) $(-2)+(+3)=(+1)$

g) $(-2)+(-3)=(-5)$

h) $(-14)+(+14)=0$

Remarque. La somme de deux nombres *opposés* est toujours nulle.

Définition
On appelle *opposé* d'un nombre relatif, le nombre relatif de même distance à zéro et de signe contraire.

Exemple : L'opposé de (-9) est 9. L'opposé de 1 est (-1). L'opposé de 0 est 0.

1.2 Suites d'additions

. . . .

Pour calculer une somme de plusieurs termes, on peut procéder par additions successives de gauche à droite :

$$
\begin{aligned}
& \underbrace{(-4)+6} \quad +(-3) \quad +(-7) \quad +8 \\
= \; & \underbrace{2+(-3)} \quad +(-7) \quad +8 \\
= \; & \underbrace{(-1)+(-7)} \quad +8 \\
= \; & \underbrace{(-8)+8} \\
= \; & 0
\end{aligned}
$$

Propriété
a, b, et c sont des nombres relatifs. L'addition de nombres relatifs est *commutative*.

$$a+b=b+a$$

L'addition de nombres relatifs est *associative*.

$$a+b+c=(a+b)+c$$

Exemple :

a) $(-7)+5=-2=5+(-7)$

b)
$$
\begin{aligned}
(-6)+4+(-4) &= 4+(-6)+(-4) && \text{(par commutativité)} \\
&= 4+(-4)+(-6) && \text{(par commutativité)} \\
&= [4+(-4)]+(-6) && \text{(par associativité)} \\
&= -6
\end{aligned}
$$

Remarque. L'ordre des termes importe peu dans une somme, ce qui conduit à la méthode de l'exemple suivant :

....

A travers un exemple : $A=(-4)+(+8)+(-20)+(+7)+(-12)$

Etape 1 On regroupe d'une part les positifs et d'autre part les négatifs :

$$A=(+8)+(+7)+(-4)+(-20)+(-12)$$

Etape 2 On effectue la somme des positifs et celle des négatifs :

$$A=(+15)+(-36)$$

Etape 3 On termine le calcul :

$$A=(-21)$$

Exemple : $B=(+7)+(-9)+(-12)+(+14)+(-3)+(+6)$

2 Soustractions de nombres relatifs

2.1 Généraliser le calcul

On a vu dans le chapitre précédent que les nombres relatifs permettaient d'étendre l'opération de soustraction à n'importe quels nombres : grâce aux nombres relatifs toutes les soustractions sont possibles !

Mais qu'est-ce qu'une soustraction ?

Définition
On appelle *différence* de deux nombres relatifs a et b (dans cet ordre) l'unique nombre relatif qui ajouté à b donne a. On le note $a-b$.

Exemple :

a) $(+5)+\ldots\ldots=(+7)$
$(+7)-(+5)=\ldots\ldots$

b) $(+19)+\ldots\ldots=(+9)$
$(+9)-(+19)=\ldots\ldots$

c) $(-4)+\ldots\ldots=(-6)$
$(-6)-\ldots\ldots=(-2)$

d) $(-1)+\ldots\ldots=(+4)$
$\ldots\ldots-(-1)=(+5)$

Remarque.

a) $(+7)-(+5)=(+2)$
équivaut à : $(+7)+\ldots\ldots=(+2)$

b) $(+9)-(+19)=(-10)$
équivaut à :$(+9)+\ldots\ldots=(-10)$

c) $(-6)-(-4)=(-2)$
équivaut à :$(-6)+\ldots\ldots=(-2)$

d) $(+4)-(-1)=(+5)$
équivaut à :$(+4)+\ldots\ldots=(+5)$

Propriété
Pour soustraire un nombre b à un nombre a, on ajoute à a l'opposé de b.

$$a-b=a+(-b)$$

Démonstration. On cherche le nombre qui ajouté à b donne a, c'est à dire la différence $a-b$. On peut toujours écrire :

$$a-b=a-b+0$$

. Or la somme d'un nombre et de son opposé est nulle :

$$\begin{aligned} a-b &= a-b+b+(-b) \\ &= a-b+b+(-b) \\ &= a+(-b) \end{aligned}$$

□

Slogan !

Soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé.

On transforme la soustraction en addition d'opposé : $(+4)-(+9)=(+4)+(-9)=(-5)$
Exemple : Effectuer les soustractions suivantes :

a) $(-10)-(-23)$

b) $(+12)-(+7)$

c) $(+34)-(-15)$

d) $-(-7)-(-10)$

Remarque. Attention : la soustraction n'est ni commutative, ni associative.

$$\begin{cases}(-3)-(+2)=(-3)+(-2)=-5\\(+2)-(-3)=2+(+3)=5\end{cases}$$

et on constate que : $(-3)-(+2) \neq (+2)-(-3)$.

$$\begin{cases}(-3)-\big((+1)-(+4)\big)=(-3)-\big((+1)+(-4)\big)=(-3)-(-3)=0\\\big((-3)-(+1)\big)-(+4)=\big((-3)+(-1)\big)+(-4)=(-4)+(-4)=-8\end{cases}$$

et finalement, $(-3)-\big((+1)-(+4)\big) \neq \big((-3)-(+1)\big)-(+4)$.

2.2 Simplification d'écriture

. . . .

Vu les règles de calcul précédentes, on peut avantageusement alléger les notations :

Exemple :	$+5$	$=$	5	(premier paragraphe)
	-2	$=$	-2	Attention
	$(+5)+(+8)$	$=$	$5+8$	(premier paragraphe)
	$(+5)+(-2)$	$=$	$5-2$	(ajouter l'opposé, c'est soustraire)
	$(+5)-(+8)$	$=$	$5+(-8)=5-8$	(slogan)
	$(+5)-(-2)$	$=$	$5+2$	(encore le même slogan)

. . . .

A travers un exemple : $A=(+10)+(-15)+(+7)-(+4)-(-9)$

Calculons A :

$$\begin{aligned}A&=(+10)+(-15)+(+7)-(+4)-(-9)\\&=(+10)+(-15)+(+7)+(-4)+(+9) && \textit{On change les soustractions en additions.}\\&=(+10)+(+7)+(+9)+(-15)+(-4) && \textit{On regroupe positifs et négatifs.}\\&=(+26)+(-19)\\&=(+7)\end{aligned}$$

Simplifions maintenant l'expression A :

Règles

1. On supprime les + des nombres positifs ;
2. On supprime alors les parenthèses de chaque nombre négatifs en appliquant la *règle des signes* :

+	devant	+	donne	+
−	devant	+	donne	−
+	devant	−	donne	−
−	devant	−	donne	+

Alors l'expression A s'écrit :

$$\begin{aligned} A &= (+10)+(-15)+(+7)-(+4)-(-9) \\ &= 10-15+7-4+9 \end{aligned}$$

Remarque. Dans cette écriture on retrouve tous les nombres relatifs qui apparaissent dans la deuxième ligne du calcul de A. (Entourer les nombres relatifs et leurs signes dans cette ligne).

Cela signifie que nous avons maintenant une suite de nombres relatifs entre lesquels une addition est sous-entendue.

$$\begin{array}{ccccccccccc} A & = & 10 & & -15 & & +7 & & -4 & & +9 \\ & & & + & & + & & + & & + & \textit{Additions sous-entendues} \end{array}$$

Avec une écriture simplifiée, pour calculer l'expression il suffit de procéder comme d'habitude.

Etape 1 On regroupe les nombres positifs et les nombres négatifs :

$$A = 10+7+9-15-4$$

Etape 2 On calcule la somme des positifs et celle des négatifs :

$$A = 26-19$$

Etape 3 On calcule le résultat final :

$$A = 7$$

Remarque. L'écriture $10+7+9-15-4$ s'appelle une somme algébrique.

Exemple :

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A &= (+14)-(-9)+(-7)-(+1) \\ B &= -(+12)-(-4)+(-7)-(-8)+(-7) \\ C &= -[-(-3)] \end{aligned}$$

2. Simplifier puis calculer les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} D &= (-3)+(-5)-(-11)+(+4)-(+12) \\ E &= (+4)-(+6)+(-14) \\ F &= (-7)+(-2,4)-(+4,5)-(+12) \end{aligned}$$

3. Calculer les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} G &= -12+7-5+8 \\ H &= -3+1-7+14-7+3-10 \end{aligned}$$