Chapitre 15 : Parallélogrammes

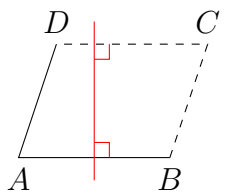
1 Carte d'identité

1.1 Définition

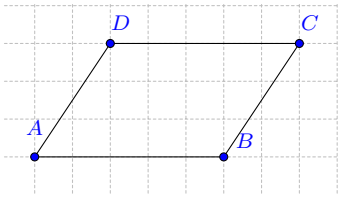
Définition
Un *parallélogramme* est un quadrilatère dont les côtés opposés sont *parallèles*.

Exemple : Construire un parallélogramme $ABCD$:

A l'aide d'une règle et d'une équerre :



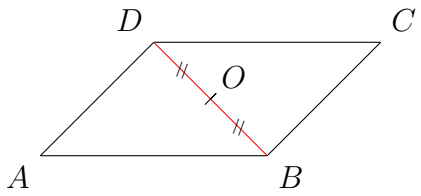
On peut s'aider des carreaux :



1.2 Propriétés

Théorème
Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors, l'intersection de ses diagonales est son centre de symétrie.

Démonstration. On note O le milieu de $[DB]$.



On sait que : D est donc le symétrique de B par rapport à O.
d'après la définition, les côtés opposés de $ABCD$ sont deux à deux parallèles.

Or : le symétrique d'un segment par rapport à un point est un segment parallèle et de même longueur.

Donc : le symétrique de $[BA]$ par rapport à O est un segment d'extrémité D sur la droite (DC)
le symétrique de $[DA]$ par rapport à O est un segment d'extrémité B sur la droite (BC)

Finalement : le symétrique du point A est l'intersection C des droites (DC) et (BC).

Cela prouve que O est le milieu de la diagonale $[AC]$, donc que les diagonales se coupent en leurs milieux et par conséquent que le quadrilatère admet O pour centre de symétrie. □

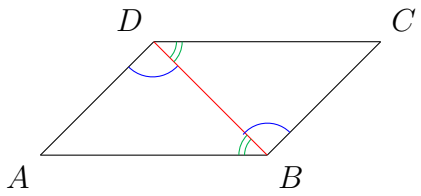
Propriété
Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors :

- Les côtés opposés sont deux à deux parallèles et égaux ;
- Les angles opposés sont de même mesure ;
- Les diagonales se coupent en leur milieu.

Démonstration. Conséquence du théorème précédent !

Autre démonstration pour les deux premiers points :

Soit $ABCD$ un parallélogramme.



On sait que : $[AD] \parallel [BC]$.
les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{DBC}$ sont alternes-internes.
Or : si deux droites parallèles sont coupées par une même séquante, elles forment des angles alternes-internes égaux.
Donc : $\widehat{ADB} = \widehat{BDC}$

De la même façon : $\widehat{DBA} = \widehat{DBC}$.

Par ailleurs les triangles ADB et DBC ont le côté $[DB]$ en commun ; ces deux triangles se construisent donc de la même façon (un côté connu et deux angles adjacents à ce côté connus) et avec les mêmes mesures. On dit que les triangles ADB et DBC sont égaux.

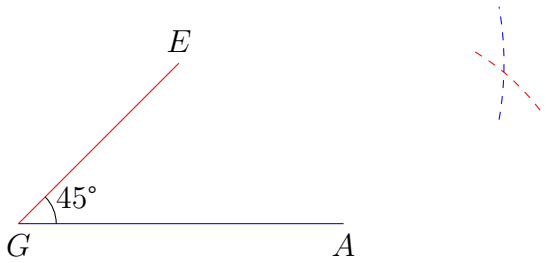
Cela prouve que les segments $[AD]$ et $[BC]$ sont de même longueur et que les côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont de même longueur.

On a prouvé en passant que les angles opposés du parallélogramme sont de même mesure.

□

1.3 Applications

Exemple : On peut utiliser ces propriétés pour construire plus précisément à l'aide du compas. Construire le parallélogramme $GARE$ tel que : $GA = 4,3$ cm, $GE = 3$ cm et $\widehat{AGE} = 45°$.



Exemple : On peut utiliser ces propriétés pour démontrer.

$MILK$ est un parallélogramme de centre O tel que $MK = 4$ cm ; $KO = 2$ cm et $\widehat{KMI} = 65°$.

a) Faire une figure à main levée en y reportant les informations connues ;

b) Montrer que les droites (MI) et (LK) sont parallèles ;

c) Déterminer la longueur IL ;

d) déterminer la longueur IO ;

e) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ILK}$.

2 Reconnaître un parallélogramme

2.1 Propriétés réciproques

On peut montrer que les réciproques des propriétés précédentes sont également vraies. Elles serviront à montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

Propriété

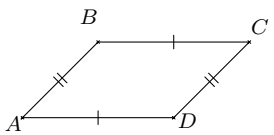
- Un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux de même longueur est un parallélogramme ;
- Un quadrilatère qui possède deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme ;
- Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme ;
- Un quadrilatère dont les angles opposés sont deux à deux de même mesure est un parallélogramme.

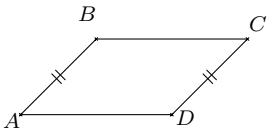
Démonstration. Etant donné un quadrilatère vérifiant l'une des conditions ci-dessus, la preuve consiste à montrer que ses diagonales se coupent en leurs milieux il vient alors que la figure admet un centre de symétrie et donc est un parallélogramme. □

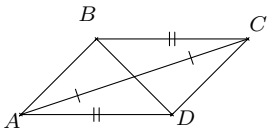
2.2 Applications

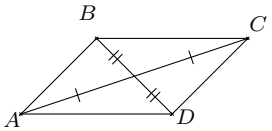
Ces propriétés permettent d'identifier un parallélogramme.

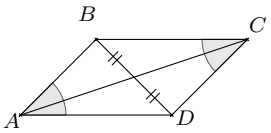
Exemple : Parmi ces figures identifier les parallélogramme et rappeler la propriété qui permet de l'affirmer :

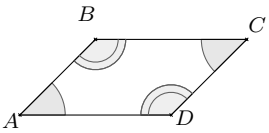
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

Exemple : Avec deux étapes : $ABCD$ est un quadrilatère tel que $AB = CD$; $(AB) \parallel (CD)$; $BC = 4$ cm. Montrer que $AD = 4$ cm.

3 Parallélogrammes particuliers

3.1 Losange

Définition
Un *losange* est un quadrilatère qui possède quatre côtés égaux.

Propriété
Un parallélogramme qui possède deux *côtés* consécutifs de même longueur est un losange.

Démonstration. On utilise la propriété des parallélogrammes relative aux longueurs des côtés opposés. □

Exemple : Construire les losanges $ABCD$ de centre O suivants :

a) $AB = 4$ cm et $\widehat{ABC} = 50°$;

b) $AD = 3$ cm et $\widehat{BCD} = 30°$.

Propriété
Un parallélogramme dont les *diagonales* sont perpendiculaires est un losange.

Démonstration. Une diagonale est la médiatrice de l'autre, la propriété des médiatrices assure que les quatre côtés sont de même mesure. □

Exemple : Construire les losanges $ABCD$ de centre O suivants :

a) $AC = 8$ cm et $BD = 3$ cm ;

b) $DO = 2$ cm et $\widehat{ADO} = 40°$.

3.2 Rectangle

Définition
Un *rectangle* est un quadrilatère qui possède quatre angles droits.

Propriété
Un parallélogramme qui possède deux *côtés* consécutifs perpendiculaires est un rectangle.

Démonstration. On utilise le fait que les angles opposés d'un parallélogramme sont de même mesure, puis si deux droites sont parallèles entre elles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. □

Exemple : Construire les rectangles $ABCD$ de centre O suivants :

a) $BC = 3$ cm et $AB = 4,5$ cm ;

b) $AD = 3$ cm et $AC = 6$ cm.

Propriété
Un parallélogramme dont les *diagonales* sont de même longueur est un rectangle.

Démonstration. (admis) On peut considérer la somme des angles à la base des triangles isocèles formés par les diagonales. □

Exemple : Construire les rectangles $ABCD$ de centre O suivants :

a) $AO = 3$ cm et $\widehat{BOC} = 50°$;

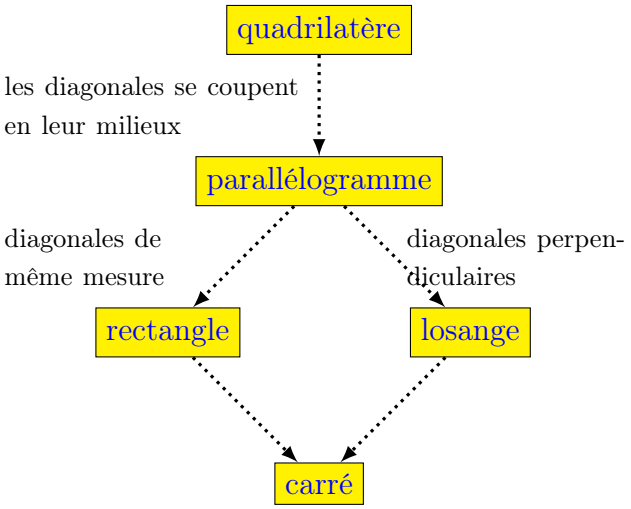
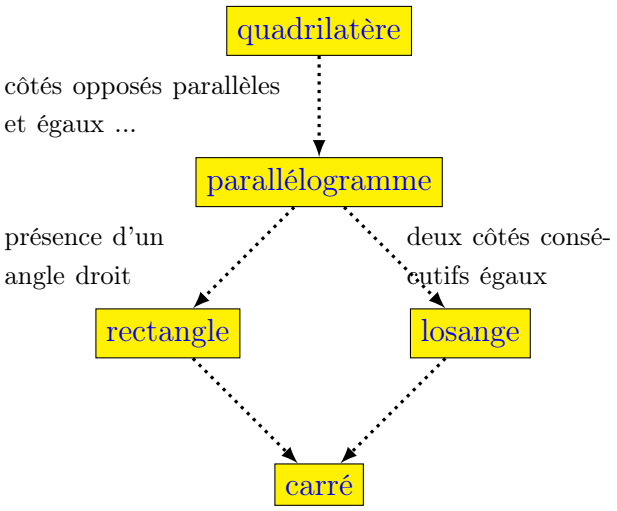
b) $AB = 7$ cm et $\widehat{DCA} = 27°$.

3.3 Carré

Définition
Un *carré* est un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur et quatre angles droits.

Propriété
Un parallélogramme qui est à la fois un carré et un losange est un carré.

Avec les diagonales :



Avec les côtés :