

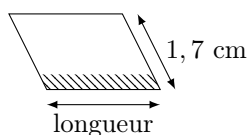
Chapitre 14 : Calcul littéral

Introduction

Exercice n° 1. Une entreprise d'outils de bricolage propose des recharges de lames pour cutter :



Une lame est constituée d'un parallélogramme métallique dont on connaît la mesure suivante :



- Si une lame mesure 3 cm de long, quel est le périmètre d'une recharge de 4 lames ?
- Si une lame mesure 3,5 cm de long quel est le périmètre d'une recharge de 4 lames ?
- Si une lame mesure L cm de long exprimer, en fonction de L , le périmètre d'une recharge de 4 lames.

1 Expressions littérales

1.1 nombres, et lettres

Définition

Une *expression littérale* est une expression contenant une ou plusieurs lettres. Ces lettres désignent des nombres.

Exemple :

1. On utilise le calcul littéral dans les formules. Pour l'aire d'un rectangle,

$$A = L \times l$$

Les lettres L et l représentent des nombre (les unités de mesures étant fixées).

2. Chez un fleuriste la rose coûte 1,50€ et on paie 0,50€ la confection du bouquet. Pour exprimer facilement le prix p du bouquet qui dépend du nombre n de roses achetée, on peut construire une formule, une expression littérale :

$$p = n \times 1,50 + 0,50$$

3. Pour résoudre un problème il peut-être très pratique d'utiliser une lettre pour symboliser l'inconnue recherchée. Cela permet de modéliser le problème, puis de manipuler des expressions pour répondre à la question posée :

Un chocolatier veut faire des paquets de 200 g de chocolat contenant deux fois plus de chocolats noirs que de chocolats au lait. Un chocolat noir pèse 6,75 g alors qu'un chocolat au lait pèse 6,5 g. Combien de chocolats noirs et au lait doit-il mettre dans ses paquets ?

Rédaction :

On note x le nombre de chocolats au lait. La masse des chocolats au lait est : $6,5 \times x$.
Le nombre de chocolat noir est : $2 \times x$. La masse des chocolats noir est : $2 \times x \times 6,75$

Additionnons les masses

$$\text{des différents chocolats : } 6,5 \times x + 2 \times x \times 6,75 = 200$$

$$\text{donc : } 6,5 \times x + 13,5 \times x = 200$$

$$\text{donc : } 20 \times x = 200$$

$$\text{donc : } 20 \times x \div 20 = 200 \div 20$$

$$\text{enfin : } x = 10.$$

1.2 Calculer une expression littérale

Exemple : $A = 4 \times x + 7 \times y - 5$

On ne peut connaître la valeur de A que si on connaît les valeurs de x et y qui sont deux nombres.

- Si $x = 2$ et $y = 4$ alors :

$$A = 4 \times x + 7 \times y - 5$$

$$= 4 \times 2 + 7 \times 4 - 5$$

$$= 8 + 28 - 5$$

$$= 31$$

- Si $x = 4$ et $y = 13$ alors :

$$\begin{aligned} A &= 4 \times x + 7 \times y - 5 \\ &= 4 \times \dots + 7 \times \dots - 5 \\ &= \dots + \dots - 5 \\ &= \dots \end{aligned}$$

Remarque. La valeur de A dépend de celles de x et y . On dit que A est *fonction* de x et y .

Exemple : Calculer $B = 5 \times x - 2 \times x + 7$ pour $x = 21$.

1.3 simplification d'écriture

Convention

On peut supprimer le signe \times lorsqu'il est suivi d'une lettre ou d'une parenthèse.

- Entre un nombre et une lettre :

$$\begin{aligned} - 3 \times a &= 3a \\ - 100 \times x &= 100x \\ - x \times 2 &= \cancel{x}2 = 2x \end{aligned}$$

- Entre deux lettres :

$$\begin{aligned} - a \times b &= ab \\ - a \times a &= a^2 \text{ (se lit "a puissance 2"} \\ &\text{ou "a au carré")} \end{aligned}$$

- Entre un nombre et une parenthèse :

$$\begin{aligned} - 4 \times (7 + x) &= 4(7 + x) \text{ (se lit "4} \\ &\text{facteur de } 7 + x\text{")} \\ - (8 - y) \times 2 &= 2(8 - y) \end{aligned}$$

- Entre une lettre et une parenthèse :

$$\begin{aligned} - a \times (x - y) &= a(x - y) \\ - 7 + x \times (9 + z) &= 7 + x(9 + z) \end{aligned}$$

- Entre deux parenthèses :

$$- (7 + x) \times (y - 4) = (7 + x)(y - 4)$$

Notation

Si a désigne un nombre,

$$\begin{aligned} \text{✍ } a \times a &= aa = a^2, \text{ lire "a au carré"}; \\ \text{✍ } a \times a \times a &= aaa = a^3, \text{ lire "a au cube"}; \\ \text{✍ } \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} &= a^n, \text{ lire "a puissance n"}. \end{aligned}$$

1.4 Réduction d'expression

Définition

Réduire une expression c'est la simplifier en effectuant tous les calculs possibles.

Exemple :

a) $5+4 - x = 9 - x$

b) $-4-x+7-x = -4+7-x-x = 3-2x$

2 Egalité

2.1 Définition

Dans une égalité mathématiques, le signe égal marque un lien d'identité entre deux expression. Cette identité est soit *vraie* soit *fausse*.

Exemple :

- $3 \times 4 + 6 = 3 \times 6$

On calcule chaque membre séparément :

- Premier membre : $3 \times 4 + 6 = 12 + 6 = 18$

- Deuxième membre : $3 \times 6 = 18$

La valeur de chaque membre est la même donc l'égalité est vraie.

- $4 + 5 = 2 + 3$

- Premier membre : $5 + 4 = 9$

- Deuxième membre : $2 + 3 = 5$

Chaque membre n'a pas la même valeur, donc l'égalité n'est pas vraie.

2.2 Tester une égalité

Exemple : Voici une égalité : $5x - 3 = 2x - 1$. Cette égalité est-elle vraie pour $x = 10$?

- Premier membre : $5x - 3 = 5 \times 10 - 3 = 47$

- Deuxième membre : $2x - 1 = 2 \times 10 - 1 = 19$

$47 \neq 19$, donc l'égalité n'est pas vraie pour $x = 10$.

Exemple : Voici une autre égalité : $7x - 2 = 4x + 4$. Cette égalité est-elle vraie pour $x = 3$? Pour $x = 2$?

Remarque. Une seule valeur numérique où l'égalité est fausse suffit à montrer que l'égalité est fausse en générale. Attention, pour montrer qu'une égalité est vraie en général, un exemple ne suffit pas!

Méthode

Pour montrer qu'une égalité est vraie, on peut calculer :

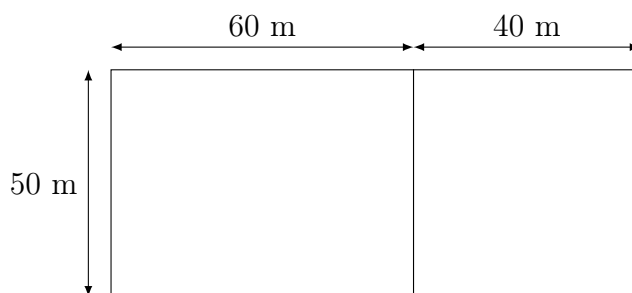
- ✎ d'une part le membre à gauche du signe égal ;
- ✎ d'autre part le membre de droite ;
- ✎ puis on observe si l'égalité est vraie ou fausse pour la valeur testée.

Exemple : Tester l'égalité $3x + 6 = 5x + 2$ pour $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$.

3 Distributivité

3.1 Introduction

Un terrain rectangulaire est composé de deux parcelles rectangulaires :



Calculer de deux façons différentes l'aire du terrain.

1^{ère} façon :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 50 \times (60 + 40) \\ &= 50 \times 100 \\ &= 5000\end{aligned}$$

2^{ème} façon :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 50 \times 60 + 50 \times 40 \\ &= 3000 + 2000 \\ &= 5000\end{aligned}$$

Les deux calculs sont égaux, donc :

$$\underbrace{50 \times (60 + 40)}_{\text{un produit}} = \underbrace{50 \times 60 + 50 \times 40}_{\text{une somme}}$$

Remarque. Lorsque l'on passe d'un produit à une somme on dit qu'on *distribue*.

3.2 Distribuer, développer

Propriété

Si k , a , et b sont trois nombres :

$$k \times (a + b) = ka + kb$$

Remarque. Dans le produit $k(a + b)$ il y a des parenthèses. Dans la somme $k \times a + k \times b$ elles n'y sont plus, on dit qu'on a *développé* car on a enlevé les parenthèses qui sont comme des enveloppes.

ATTENTION : Dans une expression de type $k \times (a \times b)$ on ne distribue pas car les parenthèses sont inutiles.

Exemple :

1. Calculer en appliquant la distributivité :

a) $3(7 + 8)$

b) $(18 - 3) \times 4$

c) $5 \times (10 - 2 + 3)$

2. Calculer de deux façons :

a) $8 \times (20 + 5)$

b) $7 \times (100 + 1)$

3. Mme Meunier a acheté 3 sac de blé à 10€chacun, 3 machines à 180€chacune et 3 récipients à 40€chacun. Calculer de deux façons différentes sa dépense totale.

Remarque. En calcul mental, on utilise souvent la distributivité :

a) $7,2 \times 101$

b) 8×99

c) $52 \times 4 + 52 \times 6$

Définition

Développer c'est transformer un produit en somme.

$$\xrightarrow{\text{développer}} \\ k \times (a + b) = ka + kb$$

On peut aussi développer une expression littérale.

Exemple :

a) $3 \times (x - 2)$

b) $7(10 - x)$

3.3 Factoriser

Définition

Factoriser une expression c'est transformer une somme en produit.

$$k \times (a + b) = ka + kb$$

←
factoriser

Pour factoriser, il faut écrire un produit : pour cela il faut trouver un *facteur commun* à chaque *terme* de la somme.

Exemple : Factoriser l'expression suivante.

$$C = 13 \times 5 + 13 \times 3 - 2 \times 13$$

Cette expression est une somme qui compte 3 termes. Dans chaque terme on trouve 13 comme facteur : c'est le facteur commun.

A la place des 3 multiplications on en écrit une seule :

$$C = 13 \times (5 + 3 - 2)$$

Remarque. On retrouve autant de termes dans la parenthèse qu'il y en avait au départ.

Exemple : Factoriser les expressions suivantes :

A = $3x - 3y$

D = $3x - 3 + 3y$

B = $2x - 2y + 2z$

E = $4x - 5x$

C = $4x - 4$

F = $5a + 9a - a$