

Chapitre 12 : Proportionnalité

Introduction

Le périmètre d'un carré dépend de la longueur de l'un de ses côtés. Compléter le tableau suivant :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Longueur d'un côté (cm)	1	2			5		
2	Périmètre (cm)			16	18		28	100

1. Lorsqu'on connaît la longueur d'un côté du carré comment calcule-t-on son périmètre ?

.....

2. Lorsqu'on connaît le périmètre d'un carré comment calcule-t-on la longueur d'un de ses côtés ?

.....

3. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule **B2**, avant de l'étirer, pour calculer le périmètre du carré ?

.....

Le périmètre d'un carré *dépend* de la longueur de ses côtés. On dit que le périmètre est *fonction* du côté.

Cette fonction ou relation qui existe entre périmètre et longueur du côté est une on obtient le périmètre en par 4 la longueur d'un côté.

A l'inverse, on peut obtenir la longueur d'un côté du carré en son périmètre par 4.

On dit que le périmètre d'un carré est à la longueur d'un de ses côtés : c'est une situation de *proportionnalité*.

1 Nombres et grandeurs proportionnels

1.1 Grandeurs proportionnelles

Définition

Deux grandeurs sont dites *proportionnelles* si l'on passe des valeurs numériques exprimant l'une à celles exprimant l'autre en les multipliant par un facteur constant. Ce nombre constant est appelé *coefficient de proportionnalité*.

Exemple :

- a) Dans l'exemple d'introduction l'aire et la longueur du côté d'un carré sont proportionnelles, le coefficient de proportionnalité est 4 ou $\frac{1}{4}$.
- b) Les tomates sont vendues 2€ le kilogramme. Le prix des tomates est proportionnel à leur masse.

Masse de tomates (en kg)	0,5	1	2	5
Prix (en €)		2		

On passe des nombres de la première ligne à ceux de la seconde en multipliant par ...

- c) On regarde un troupeau de mouton, on compte le nombre de pattes.
Grandeurs : nombre de moutons et nombre de pattes ;
coefficient de proportionnalité : 4.

Remarque. L'exemple a) et c) conduisent aux mêmes tableaux. On peut donner du sens à la notion de tableau de proportionnalité.

1.2 tableau de proportionnalité

Définition

Il y a proportionnalité dans un tableau lorsqu'on peut passer d'une ligne à l'autre en multipliant ou en divisant par un même nombre différent de zéro. Ce nombre est appelé *coefficient de proportionnalité*.

En pratique dans un tableau de proportionnalité tous les quotients sont égaux : avec l'exemple d'introduction on a :

Longueur d'un côté (cm)	1	2	3	4	5	6	10	20
Périmètre (cm ²)	4	8	12	16	20	24	40	80

Diagramme illustrant la proportionnalité : un cercle à gauche contient $\times \frac{1}{4}$ avec des flèches pointant vers la première ligne du tableau. Un cercle à droite contient $\times 4$ ou $\times \frac{4}{1}$ avec des flèches pointant vers la deuxième ligne du tableau.

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} = \frac{6}{24} = \frac{10}{40} = \frac{20}{80}$$

$$\text{ou encore : } \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \dots$$

Rappel : Dans le chapitre sur les fractions, nous avons vu que le nombre qui multiplié par b donne a est le quotient $\frac{a}{b}$.

Règle

Pour savoir si un tableau est de proportionnalité, on peut calculer tous les quotients. S'ils sont *tous* égaux, alors il y a proportionnalité.

Exemple : Ces tableaux sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

a)

3	6	8	13
21	42	56	91

c)

0,5	3	4,1	5,2	10	1,3
1,5	9	12,3	15,6	30	3,9

b)

2	5	0,4	0,9	6
16	40	3,2	7,02	48

2 Application : trouver une quatrième proportionnelle

2.1 Rappel : coefficient de proportionnalité

Dans la première partie du cours nous avons vu que deux grandeurs étaient proportionnelles si les valeurs de l'une étaient obtenues par la *multiplication* des valeurs de l'autre *par un nombre fixé* (toujours le même, qui ne change pas).

Exemple : Si une poule pond trois œufs par jour, le nombre d'œuf obtenu est proportionnel au nombre de jours passé.

- ☞ On obtient le nombre d'œuf en *multipliant* le nombre de jours passé par 3.
- ☞ On obtient le nombre de jours en divisant le nombre d'œuf par 3, ce qui est identique à prendre « $\frac{1}{3}$ du nombre des œufs », à *multiplier* le nombre d'œufs par $\frac{1}{3}$.

En pratique dans un tableau de proportionnalité, on peut calculer deux coefficient de proportionnalité différents :

- ☞ Celui permettant de passer de la première ligne à la seconde par *multiplication* ;
- ☞ Son *inverse* qui permet de passer de la seconde ligne à la première toujours par *multiplication*.

Remarque. On voit ici que diviser revient à multiplier par l'inverse.
Comment calculer un coefficient de proportionnalité ?

a) Le nombre qui multiplié par 6 donne 30 est 5 :

b) Le nombre qui multiplié par 3 donne 1 est :

$$6 \times \dots = 30$$

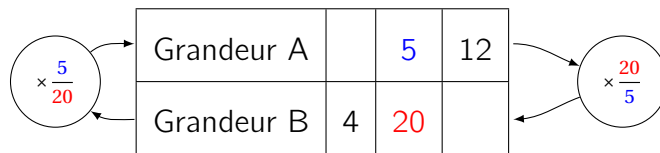
$$5 = \frac{30}{6}$$

$$3 \times x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

De façon générale, si a et b sont deux nombres non nuls, on rappelle que le nombre qui multiplié par b donne a est $\frac{a}{b}$.

Dans un tableau de proportionnalité pour calculer l'un des deux coefficients de proportionnalité, il suffit de calculer le bon quotient dans une colonne où l'on connaît les deux nombres.



2.2 Produit en croix

Exemple : 3 kg de cerises coûtent 12 €.

1. Combien coûte 1 kg ? (prix à l'unité)
2. Quel est le prix de 5 kg ? de 6 kg ? de 11 kg ?
3. Quelle quantité en kg obtient-on pour 28 € ?

Le prix des cerises est proportionnel à leur masse car :

- ☞ Pour calculer le prix on multiplie les quantité par le prix à l'unité.
- ☞ Pour calculer les quantité on divise par le prix à l'unité.

On peut résumer ces résultats dans un tableau de proportionnalité :

masse (kg)	1	3	5		→	$\times \frac{12}{3}$
prix (€)		12		28	←	

Remarque. Pour calculer le prix de 5 kg, on a en fait effectué le calcul :

$$12 \div 3 \times 5 = 12 \times 5 \div 3 = \frac{12 \times 5}{3}$$

On peut donc pour compléter un tableau multiplier "en diagonale" puis diviser.

Exemple : On note souvent x le nombre recherché.

a)

Masse (kg)	3	5
Prix (€)	12	x

b)

Masse (kg)	3	x
Prix (€)	12	28

$$\begin{aligned} x &= \frac{5 \times 12}{3} \\ &= \frac{60}{3} \\ &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{3 \times 28}{12} \\ &= \frac{84}{12} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Plus généralement, si a , b , c et d sont des nombres connus, écrivez, sous forme fractionnaire, le calcul permettant de trouver la valeur de la quatrième proportionnelle x .

a)

a	b
c	x

b)

a	b
x	d

c)

a	x
c	d

d)

x	b
c	d

Exemple : 7 kg de pommes coûtent 10,50 €

a) Combien coûtent 4 kg ?

Quantité (kg)	7	4
Prix (€)	10,5	

b) Avec 14 € quelle quantité peut-on acheter ?

Quantité (kg)	7	
Prix (€)	10,5	15

3 Pourcentages

3.1 Définition

Définition

Un *pourcentage* est un quotient dont le dénominateur est 100. On le note %.

Le pourcentage $\frac{16}{100}$ s'énonce " 16 pour cent " et se note aussi 16%.

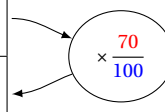
Exemple : Ecrire sous forme d'un pourcentage $\frac{1}{2}$; 0,4 ; $\frac{2}{5}$; $\frac{7}{4}$; 0,03.

3.2 Appliquer un pourcentage

Exemple : Lors de soldes on accorde une remise de 70%. Calculer le montant de la remise pour un article à 56€.

La remise est proportionnelle au prix initial de l'article : on peut représenter la situation dans un tableau où le pourcentage sera le coefficient de proportionnalité.

Prix initial (en €)	100	56
Remise (en €)	70	x



$$x = \frac{70 \times 56}{100} = 39,2$$

Rappel

Pour calculer une fraction (ou proportion) d'un nombre on multiplie la fraction par le nombre.

Ici la fraction est un pourcentage : calculer $n\%$ d'une quantité a c'est effectuer :

$$\frac{n}{100} \times a = a \times \frac{n}{100}$$

Exemple : Combien font 20% de 30 € ?

3.3 Calculer un pourcentage

Un smartphone coûte 450€ avant réduction. Le vendeur accorde une remise de 31,5€. Que représente cette remise en terme de pourcentage ?

Répondre à cette question revient à trouver la part que représenterait la réduction si le prix initial était 100€.

Prix initial (en €)	450	100
Remise (en €)	31,5	x

On peut effectuer le calcul : $x = \frac{100 \times 31,5}{450} = 7$

Remarque. On cherche ici à trouver la fraction de dénominateur 100 qui soit égal à la part que représente la remise dans le prix initial.

$$\frac{31,5}{450} = 0,07 = \frac{7}{100} = 7\%$$