

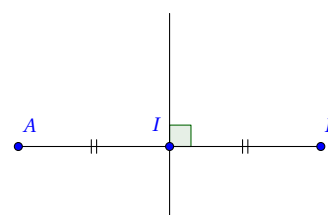
Chapitre 11 : Triangles

1 Médiatrice

1.1 Définitions

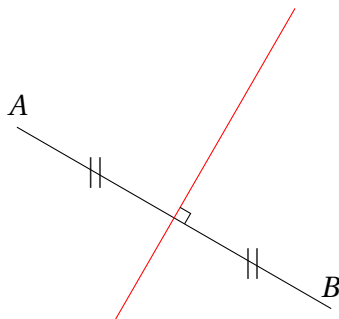
Définition

La *médiatrice* d'un segment est la droite qui le coupe perpendiculairement en son milieu.



Exemple :

Tracer un segment $[AB]$ de 6 cm. Puis à l'aide d'une équerre et d'une règle, tracer sa médiatrice.



Propriété

Si un point est sur la médiatrice d'un segment $[AB]$, alors il est à égale distance de A et de B .

Réciproquement, si un point est à égale distance des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment.

Démonstration. Pour montrer cette propriété correctement, il faut comprendre qu'elle contient en fait deux résultats à montrer séparément. Le premier : si un point est sur la médiatrice d'un segment, alors il est à égale distance des extrémités du segment. Le second, réciproquement, si un point est à égale distance des extrémités du segments, alors il est sur la médiatrice se ce segment.

1. On note I le milieu du segment $[AB]$. On suppose que M appartient à la médiatrice de $[AB]$. Alors les triangles AIM et BIM sont égaux, et donc $AM = BM$.

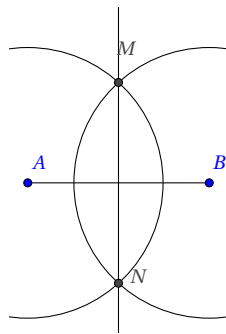
2. On suppose maintenant que M est tel que : $AM = BM$. On mène la bissectrice à \widehat{AMB} au point d'intersection I avec $[AB]$. Les triangles précédents restent égaux (pour d'autres raisons), et donc I est le milieu de $[AB]$. De plus $\widehat{MIA} = \widehat{MIB}$, angles supplémentaires, donc chacun égale à 90° .

□

Exemple : On peut utiliser cette propriété de deux façons :

- Tracer un segment $[AB]$ tel que $AB = 5$ cm, puis à l'aide de l'équerre et d'une règle tracer sa médiatrice. Puis placer un point C sur la médiatrice tel que $AC = 4$ cm. Quelle est la nature du triangle ABC ?
- On trace un segment $[DE]$ tel que $DE = 4,9$ cm. On place deux points F et G tel que $DF = DG = EF = EG = 4$ cm. Montrer que (FG) est perpendiculaire à $[DE]$.

Remarque. Pour tracer la médiatrice d'un segment il suffit de tracer deux points distincts à égale distance des extrémités du segment à l'aide d'un compas.



1.2 Cercle circonscrit

Théorème

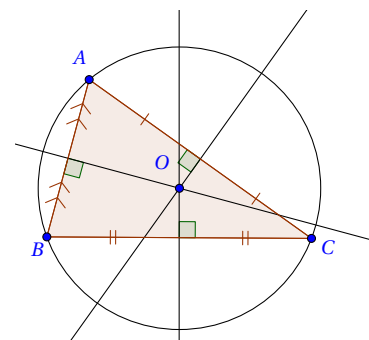
Dans un triangle, les médiatrices sont concourantes.

Démonstration. Soit ABC un triangle, notons O l'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[BC]$. O est à égale distance de A et de B , de B et de C , et donc de $OA = OC$ par transitivité, par le théorème précédent, O est aussi un point de la médiatrice de $[AC]$. □

Remarque. Ce théorème donne l'existence et l'unicité c'est à dire la bonne définition du cercle suivant.

Définition

Le cercle circonscrit à un triangle, est le cercle qui passe par chacun de ses sommets.



Propriété

Le centre du cercle circonscrit d'un triangle est le point d'intersection de ses médiatrices.

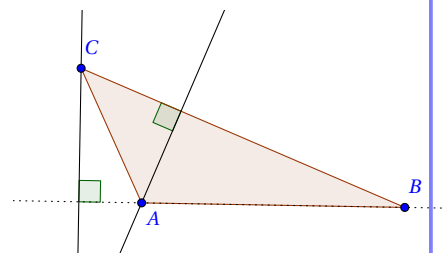
Démonstration. cf. proposition précédente. □

2 Hauteurs et aires

2.1 Définition

Définition

La *hauteur* d'un triangle ABC issue du sommet A est la droite perpendiculaire au côté $[BC]$ qui passe par A .
On dit aussi que cette droite est la hauteur relative au côté $[BC]$.



Remarque. L'intersection de la hauteur issue d'un sommet avec le côté opposé est appelée *ped* de la hauteur.

2.2 Orthocentre

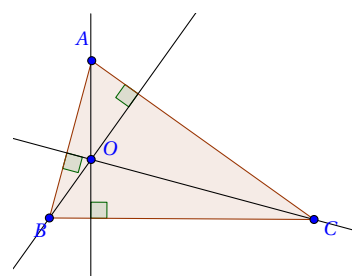
Théorème

Dans un triangle les hauteurs sont concourantes.

Démonstration. Soit ABC un triangle, on trace les parallèles aux différents côtés, passant par leurs sommets opposés. Cela fait apparaître un triangle DEF , et six parallélogrammes qui permet d'affirmer que le triangle DEF est tel que A soit le milieu de $[DE]$, B celui de $[EF]$, C celui de $[FD]$. Les hauteurs de ABC sont les médiatrices de DEF , et le théorème précédent conclut. □

Définition

Dans un triangle, l'intersection des hauteurs est appelé l'*orthocentre* du triangle.



2.3 Aires

Théorème

L'*aire* d'un triangle est donnée par la formule : $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$

Démonstration. L'idée est de se ramener à un rectangle, via un parallélogramme. □

