

# Chapitre 14 : Calcul littéral 2

## 1 Factoriser une expression

### 1.1 Vocabulaire

$$\begin{array}{ccc} a + b & = & c \\ \text{les } \textit{termes} & & \text{la } \textit{somme} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a \times b & = & c \\ \text{les } \textit{facteurs} & & \text{le } \textit{produit} \end{array}$$

*Exemple* :  $A = 3x - 5y$ . L'expression  $A$  contient deux termes  $3x$  et  $-5y$ .  
Le terme  $3x$  est composé de deux facteurs 3 et  $x$ .  
Le terme  $-5y$  est composé de deux facteurs  $-5$  et  $y$ .

Le mot *factoriser* a la même racine que le mot facteur. Ainsi, factoriser une expression, c'est l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs. C'est donc transformer une somme en produit.

- ☞  $k \times a + k \times b$  est une somme, celle de  $k \times a$  et de  $k \times b$ .
- ☞  $k \times (a + b)$  est un produit, celui de  $k$  et de  $(a + b)$ .

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{On développe}} & \\ \underbrace{k(a+b)}_{\text{forme factorisée}} & = & \underbrace{ka+kb}_{\text{forme développée}} \\ & \xleftarrow{\text{On factorise}} & \end{array}$$

### 1.2 En pratique

Pour pouvoir factoriser une expression, il faut trouver un *facteur commun* aux termes de cette expression.

*Exemple* :  $A = 6x + 4y - 8z$

étape n° 1 : On identifie les termes :

$$A = \underline{6}x + \underline{4}y + (\underline{-8}z)$$

Il y a trois termes dans l'expression.

étape n° 2 : On écrit chaque terme en le décomposant en produit de facteurs.

$$A = 2 \times 3 \times x + 2 \times 2 \times y - 4 \times 2 \times z$$

Dans chacun des trois termes, le facteur 2 est présent, c'est le *facteur commun*.

étape n° 3 : On factorise.

$$\begin{aligned}A &= 2 \times 3 \times x + 2 \times 2 \times y - 4 \times 2 \times z \\ &= 2(3 \times x + 2 \times y - 4 \times z) \\ &= 2(3x + 2y - 4z)\end{aligned}$$

On est passé d'une somme à un produit, on a bien factorisé.

*Exemple* : Factoriser.

$$\begin{aligned}B &= 6x^2 + 9x && (2 \text{ termes}) \\ &= 2 \times 3 \times x \times x + 3 \times 3 \times x && (\text{on décompose et on cherche le facteur commun}) \\ &= 3x(2x + 3) && (\text{forme factorisée})\end{aligned}$$

**Remarque.** En général, il doit y avoir autant de terme dans la parenthèse que dans l'expression de départ.

## 2 Divers cas

### 2.1 Facteur commun numérique

*Exemple* : Factoriser.

- |              |                     |
|--------------|---------------------|
| a) $3x + 3y$ | c) $25a - 10b + 5c$ |
| b) $7x - 14$ | d) $12x - 18y + 6$  |

### 2.2 Facteur commun littéral

*Exemple* : Factoriser.

- |                |                        |
|----------------|------------------------|
| a) $5x^2 - 3x$ | c) $7a^2b^3 - 9a^4b^5$ |
| b) $6ab - 5b$  |                        |

### 2.3 Facteur commun numérique et littéral

*Exemple* : Factoriser.

- |                        |                                    |
|------------------------|------------------------------------|
| a) $8x^2 - 12x + 4x^3$ | b) $10x^4y^2 - 15x^3y^3 + 5x^2y^2$ |
|------------------------|------------------------------------|

### 2.4 Facteur commun parenthèse

*Exemple* : Factoriser.

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| a) $5(x + 3) - x(x + 3)$              | d) $(x + 7)^2 + 7x(x + 7)$                   |
| b) $5x(x - 9) - 2(x - 9)$             | e) $(3x - 5)(8x - 1) - (8x - 1)(x + 2)$      |
| c) $(x + 2)(x + 1) + (x + 2)(3x + 4)$ | f) $(7x - 1)(x + 3) - 4x(x + 3) - (x + 3)^2$ |

## 2.5 Factoriser avec les identités remarquables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$\underbrace{(a+b)(a-b)}_{\text{forme factorisée}} = \underbrace{a^2 - b^2}_{\text{forme développée}}$

Exemple : Factoriser.

a)  $x^2 + 6x + 9$

d)  $9x^2 - 64$

b)  $4x^2 - 28x + 49$

e)  $16x^2 + 40x + 25$

c)  $25x^2 - 36$

f)  $81y^2 - 36y + 4$

Exemple : Factoriser.

A =  $x^2 + 2x + 1 + (3x - 2)(x + 1)$

C =  $4x^2 - 81 - (2x + 9)(-5x + 3)$

B =  $(2x - 5)(x - 9) + 4x^2 - 20x + 25$

## 2.6 Calcul mental

On peut utiliser les identités remarquables pour calculer rapidement :

Exemple :

$$\begin{aligned} 101 \times 99 &= (100 + 1)(100 - 1) \\ &= 100^2 - 1^2 \\ &= 10000 - 1 \\ &= 9999 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 44 \times 36 &= (40 + 4)(40 - 4) \\ &= 40^2 - 4^2 \\ &= 1600 - 16 \\ &= 1584 \end{aligned}$$

## 2.7 Autres factorisations

a)  $(x+3)^2 - 49$

b)  $(7x-1)^2 - (5x+3)^2$

# 3 Application : équation du second degré

## 3.1 Equation produit

### Théorème

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul.

Démonstration. Soient  $a$  et  $b$  deux nombres tels que :  $ab = 0$ .

- Si  $a = 0$  alors le résultat est clair.
- Sinon, on peut diviser par  $a$  :  $\frac{ab}{a} = \frac{0}{a} = 0$ . Donc  $b = 0$ .

Réciproquement, si l'un des facteurs est nul, alors, le produit est clairement nul. □

Ce théorème est très utile, voici une équation :  $(x+4)(x-2) = 0$ .

Elle équivaut à :  $x+4 = 0$  ou  $x-2 = 0$ , autrement dit,  $x = -4$  ou  $x = 2$ .

Mais si on développe :  $(x+4)(x-2) = x^2 + 2x - 8$ . On obtiendrait alors une équation du second degré que l'on ne sait pas (encore) résoudre.

### Méthode

$$(x-6)(x+9) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul.

$$x - 6 = 0$$

$$x = 6$$

$$x + 9 = 0$$

$$x = -9$$

Cette équation admet pour solutions :  $S = \{-9; 6\}$ .

*Exemple* : Résoudre les équations suivantes :

a)  $(2x-1)(7x+4) = 0$  ;

c)  $(3x+8) - (7x-3) = 0$  ;

b)  $4x(7x-1) = 0$  ;

## 3.2 Plus généralement : factoriser...

Lorsqu'une équation du second degré n'est pas donnée sous forme de produit, on cherche à s'y ramener :

☞ En "déplaçant" tous les termes à gauche du signe "=" ;

☞ En essayant de factoriser.

Exemple :

a)  $(4x - 1)(5 + x) - (4x - 1)^2 = 0$ ;

b)  $x = x^2 - 4x$ .

### 3.3 ... avec une identité remarquable

Equation du type :  $x^2 = a$  où  $a$  est un nombre connu.

Exemple :  $x^2 = 25$ .

Les nombres dont le carré est 25 sont : 5 et -5.

En fait pour résoudre cette équation, on peut utiliser la troisième identité remarquable :

$$\begin{aligned}x^2 &= 25 \\x^2 - 25 &= 0 \\(x - \sqrt{25})(x + \sqrt{25}) &= 0 \\x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 5 = 0 \\x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -5\end{aligned}$$

#### Définition

Si  $a$  est un nombre positif, l'unique nombre *positif* dont le carré est  $a$  est appelé la *racine carrée* de  $a$  notée :  $\sqrt{a}$ .

**Remarque.** Il est important de connaître les racines des carrés parfaits, de 0 à 225.

Exemple :

a)  $x^2 = 144$

c)  $x^2 = -144$

b)  $x^2 = 0$

#### Slogan !

Un carré est toujours positif.

d)  $x^2 - 10x = -25$ ;

f)  $7x^2 - 64 = 0$ ;

e)  $x^2 = 81$ ;

g)  $x^2 = 13$ .

#### Propriété

Une équation de type  $x^2 = a$  avec  $a \geq 0$  admet toujours pour solutions :

$$x = \sqrt{a} \quad \text{et} \quad x = -\sqrt{a}.$$

*Démonstration.* La preuve est déjà vue à travers un exemple. □

## 4 Problèmes !

Exemple : Une mère de 40 ans a deux filles de 10 et 7 ans. Dans combien d'années l'âge de la mère sera-t-il le double de la somme de l'âge de ses deux filles ?

On note  $x$  le nombre d'année écoulé. Alors :

- L'âge de la mère sera :  $40 + x$
- L'âge des filles seront respectivement :  $10 + x$  et  $7 + x$

Le problème se traduit par l'équation :  $40 + x = 2(10 + x + 7 + x)$

$$40 + x = 4x + 34$$

$$-3x = -6$$

$$x = 2$$

La mère aura donc le double de la somme des âges de ses filles dans 2 ans.

### **Méthode**

- ☞ On choisit l'inconnue ;
- ☞ on met en équation ;
- ☞ on résout l'équation ;
- ☞ on vérifie que la solution trouvée correspond bien au problème ;
- ☞ on conclut.