

Chapitre 13 : Arithmétique

1 Diviseur, multiples

1.1 Division euclidienne

Exemple : On se propose de répartir 172 œufs dans des boîtes de 12 œufs. Pour résoudre ce problème on effectue une division que l'on appelle *division euclidienne*.

$$\begin{array}{r|l} 172 & 12 \\ - 12 & 14 \\ \hline 52 & \\ - 48 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

On peut donc remplir 14 boîtes et il restera 4 œufs. On dit que : 172 est le *dividende* ; 12 le *diviseur* ; 14 le *quotient* ; et 4 le *reste*.

Définition

Si a et b sont deux entiers, alors il existe un unique entier q et un unique entier r tels que :

$$a = b \times q + r$$

et : $0 \leq r < b$.

Exemple : Effectuer les divisions euclidiennes suivantes, puis écrire le résultat sous la forme $a = b \times q + r$.

a) $a = 1789$ $b = 9$

b) $a = 509$ $b = 15$

c) $a = 1024$ $b = 64$

Remarque. On peut vérifier son résultat à l'aide de la calculatrice qui possède une touche spéciale "division euclidienne".

1.2 Diviseur, multiple

Exemple : Effectuer la division euclidienne de 105 par 21.

Définition

Si a et $b \neq 0$ sont deux nombres, on dit que b est un *diviseur* de a si le reste de la division euclidienne de a par b est nul. C'est à dire s'il existe un entier q tel que :

$$a = b \times q$$

On dit aussi que b *divise* a ou que a est *multiple* de b .

Exemple : 174 est-il divisible par 58 ? 16 est-il divisible par 3 ?

Remarque.

- 1 divise tout entier naturel ;
- Tout entier se divise lui même ;
- 0 ne divise aucun entier non nul ;
- 0 est multiple de tout entier.

1.3 Règles de divisibilité

On rappelle les règles de divisibilité :

Règle

- ☞ Un nombre est divisible par 2 si son chiffre des unités est pair ;
- ☞ Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
- ☞ Un nombre est divisible par 4 si ses deux derniers chiffres forment un nombre divisible par 4 ;
- ☞ Un nombre est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- ☞ Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9 ;
- ☞ Un nombre est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.

1.4 Application : trouver tous les diviseurs d'un nombre

Pour déterminer les diviseurs d'un nombre a , on teste les entiers successifs jusqu'à obtenir une inversion d'ordre des facteurs.

Exemple :

$$\begin{array}{l} 44 = 1 \times 44 \\ \quad = 2 \times 22 \\ \quad = 4 \times 11 \\ \quad = \sqrt{44} \times \sqrt{44} \\ \quad = 11 \times 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 84 = 1 \times 84 \\ \quad = 2 \times 42 \\ \quad = 3 \times 28 \\ \quad = 4 \times 21 \\ \quad = 6 \times 14 \\ \quad = 7 \times 12 \\ \quad = \sqrt{84} \times \sqrt{84} \\ \quad = 12 \times 7 \end{array}$$

Les diviseurs de 44 sont donc : 1 ; 2 ; 4 ; 11 ; 22 et 44. Les diviseurs de 84 sont donc : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 12 ; 14 ; 21 ; 28 ; 42 et 84.

Remarque. $\sqrt{44} \approx 6,6$ et $\sqrt{84} \approx 9,2$, on peut donc en fait s'arrêter de tester respectivement à 6 et à 9.

Exemple :

a) Diviseurs de 30 :

$$\begin{array}{ll} 1 \times 30 = 30 & (1 \text{ divise } 30, \text{ et } 30 \text{ également}) \\ 2 \times 15 = 30 & (2 \text{ divise } 30, \text{ et } 15 \text{ également}) \\ 3 \times 10 = 30 & (3 \text{ divise } 30, \text{ et } 10 \text{ également}) \\ \cancel{4} & \\ 5 \times 6 = 30 & (5 \text{ divise } 30, \text{ et } 6 \text{ également}) \\ 6 \times 5 = 30 & \end{array}$$

Les diviseurs de 30 sont donc : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30.

Remarque. On peut aussi calculer dès le départ $\sqrt{30} \approx 5,5$. On sait alors qu'il suffit de tester les entiers jusqu'à 5 inclus (ou 6 exclu).

b) Diviseurs de 198 : $\sqrt{198} \approx 14,1$ il suffit donc de tester les entiers jusqu'à 14.

$$\begin{array}{l} 1 \times 198 = 198 \\ 2 \times 99 = 198 \\ 3 \times 66 = 198 \\ \cancel{4} \\ \cancel{5} \\ 6 \times 33 = 198 \\ \cancel{7} \\ \cancel{8} \\ 9 \times 22 = 198 \\ \cancel{10} \\ 11 \times 18 = 198 \\ \cancel{12} \\ \cancel{13} \\ \cancel{14} \\ 15^2 = 225 > 198 \end{array}$$

Les diviseurs de 198 sont donc : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 11 ; 18 ; 22 ; 33 ; 66 ; 99 et 198.

c) Déterminer les diviseurs de 24, 44, 315, et 23.

2 Nombres premiers

2.1 Définition

Définition

Un entier est appelé un *nombre premier* s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple : 1 n'est pas premier, 2 est premier, 5 est premier, 15 n'est pas premier.

Théorème

Tout nombre entier qui n'est pas premier possède au moins un diviseur premier.

Démonstration. (admis) □

La contraposée de ce théorème permet de vérifier facilement si un nombre N est premier. Il suffit de vérifier qu'il ne possède pas de diviseurs premiers.

Exemple : : 109 est-il premier ?

Méthode

- ☞ On calcule la racine carré du nombre ($\sqrt{109} \approx 10,4$) ;
- ☞ On teste uniquement les nombres premiers inférieurs à cette racine carrée (2 ; 3 ; 5 ; 7).

109 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 donc 109 est premier.

a) 44 est-il premier ?

b) 51 est-il premier ?

c) 73 est-il premier ?

2.2 Décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème

Tout nombre entier se décompose de façon unique comme un produit de *facteurs premiers*.

Démonstration. (admis) □

Pour décomposer un nombre en facteurs premiers on peut grâce à ce théorème décomposer les diviseurs successifs d'un nombre pour "attraper" très rapidement sa décomposition en facteurs premiers.

Exemple : On cherche à décomposer 44 en produit de facteurs premiers.

Méthode 1 :

☞ On trouve un diviseur de 44 et on décompose 44 (on l'écrit comme un produit) :

$$44 = 2 \times 22$$

☞ On peut faire la même chose avec 22 qui n'est pas un nombre premier :

$$44 = 2 \times 2 \times 11$$

Méthode 2 :

☞ On divise 44 puis les quotients par les nombres premiers jusqu'à épuisement comme suit :

$$\begin{array}{r|l} 44 & 2 \\ 22 & 2 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Exemple : Décomposition de 315 :

$$315 = 3 \times 105$$

$$105 = 3 \times 35$$

$$35 = 5 \times 7$$

$$7 = 7 \times 1$$

Finalement : $315 = 3 \times 3 \times 5 \times 7$

On adoptera en pratique la disposition suivante :

$$\begin{array}{r|l} 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Décomposer en facteurs premiers :

a) 360

b) 216

c) 276

3 PGCD

3.1 Diviseurs communs

La décomposition en facteurs premiers d'un nombre permet de trouver l'ensemble de ses diviseurs.

Exemple : : Nous avons vu que les diviseurs de 198 étaient 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 11 ; 18 ; 22 ; 33 ; 66 ; 99 et 198.

Décomposons 198 en produit de facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 198 & 2 \\ 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Donc $198 = 2 \times 3^2 \times 11$.

Comment retrouver les diviseurs de 198 à partir de cette décomposition ?

d divise 198 si $198 = d \times q$ or l'écriture de 198, de d et de q en produit de facteurs premiers est unique : c'est très fort!! Si on décompose d et q en produit de facteurs premiers, on retrouve donc exactement les facteurs qui apparaissent dans la décomposition de 198. Ainsi chaque diviseur de 198 s'écrit sous forme d'un produit utilisant certains facteurs premiers de 198.

Si un nombre divise 198, sa décomposition en produit de facteurs premiers est « contenue » dans celle de 198.

$$105 = 3 \times 5 \times 7$$

Nombre de facteurs premiers	diviseurs de 105
0	1
1	3 ; 5 ; 7
2	15 ; 21 ; 35
3	105

Remarque. On peut vérifier facilement combien de diviseurs possède un nombre avec sa décomposition en facteurs premiers.

Exemple : Ici on a deux choix pour la puissance de 2, trois pour celle de 3, et deux pour celle de 11, cela donne $2 \times 3 \times 2 = 12$ diviseurs.

Exemple : Chercher tous les diviseurs communs :

a) de 8 et 20 ;

b) de 12 et 42 ;

c) de 26 et 63.

Définition

Le PGCD de deux nombres est leur plus grand commun diviseur.

Exemple : Donner le PGCD des couples de nombres précédents.

Définition

Si deux nombres ont pour seul diviseur commun 1, on dit qu'ils sont *premier* entre eux.

3.2 Applications

Définition

Une fraction est *irréductible* si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exemple : Simplifier au maximum les fractions suivantes.

a) $\frac{168}{1600}$

b) $\frac{36}{90}$

c) $\frac{12}{42}$

Remarque. Pour rendre une fraction irréductible, il suffit de diviser numérateur et dénominateur par leur PGCD.

Exemple : Julie souhaite disposer de 182 brins de muguet, et 78 roses. Elle souhaite effectuer un maximum de bouquets identiques : quelle en sera la composition, et combien peut-elle en faire.

Remarque. Dans les deux exemples précédents, on cherche le PGCD de deux nombres. Pour le trouver il suffit de prendre les facteurs premiers communs de la décomposition de l'un et l'autre des nombres à la plus petite puissance qui apparaît.

Exemple :

$$\begin{array}{r|l}
 36 & 2 \\
 18 & 2 \\
 9 & 3 \quad 36 = 2^2 \times 3^2 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

Ainsi PGCD(36;90) = $2 \times 3^2 = 18$

$$\begin{array}{r|l}
 90 & 2 \\
 45 & 3 \\
 15 & 3 \quad 90 = 2 \times 3^2 \times 5 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 182 & 2 \\
 91 & 7 \\
 13 & 13 \quad 182 = 2 \times 7 \times 13 \\
 1 &
 \end{array}$$

Ainsi PGCD(78;182) = $2 \times 13 = 26$

$$\begin{array}{r|l}
 78 & 2 \\
 39 & 3 \\
 13 & 13 \quad 78 = 2 \times 3 \times 13 \\
 1 &
 \end{array}$$