Chapitre 12 : fonctions affines

1 Définition

1.1 Définition

Dans l'exemple d'introduction du chapitre 6 "fonctions linéaires" le **Tarif 2** décrivait une *fonction affine*. En notant x le nombre d'entrées au cinéma, et y le prix à payer :

$$y = 3,5x + 15$$

Définition
Si a et b sont deux nombres, le procédé qui a tout nombre x associe le nombre $ax+b$ s'appelle une *fonction affine*.

Remarque.

- ☞ x a pour image $ax+b$ par cette fonction.
- ☞ $ax+b$ a pour antécédent x par cette fonction.
- ☞ Si f désigne une fonction affine, on note : $f : x \longmapsto ax+b$ ou $f(x) = ax+b$.

Exemple : f et g sont les fonctions suivantes : $f(x) = -3x+2$ et $g(x) = \frac{1}{2}x - 4$. Ces deux fonctions sont affines car de la forme $ax+b$.

Pour f : $a = -3$ et $b = 2$;

pour g : $a = \frac{1}{2}$ et $b = -4$.

Vocabulaire

- ☞ a s'appelle le *coefficient directeur* (comme pour les fonctions linéaires)
- ☞ b s'appelle *l'ordonnée à l'origine* (car c'est... l'ordonnée à l'origine – $f(0)$!)

1.2 Images, antécédents

Exemple n° 1. Calculer les images de -1 par f et de 6 par g. Calculer $g(-10)$ et $g(3)$.

Exemple n° 2.

a) Quel est le nombre dont l'image est -28 par f ?

On cherche x tel que : $f(x) = -28$.
Or $f(x) = -3x+2$.

On résout donc l'équation :

$$\begin{aligned} f(x) &= -28 \\ -3x+2 &= -28 \\ -3x &= -28-2 \\ x &= \frac{-30}{-3} \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Pour vérifier : on calcule l'image de 10 par f.

L'antécédent de -28 par f est 10.

b) Quel est l'antécédent de -1 par g ?

1.3 Représentations graphiques

On a vu dans l'exemple d'introduction du chapitre 6 que la représentation graphique du **tarif 2** était une droite.

Plus généralement, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite. Pour tracer cette droite il suffit de placer deux de ses points.

On calcule donc arbitrairement (mais astucieusement si possible) les images de deux nombres.

Exemple : $f : x \longmapsto -3x+2$ Pour représenter graphiquement cette fonction on peut calculer : $f(0)$ et $f(1)$.

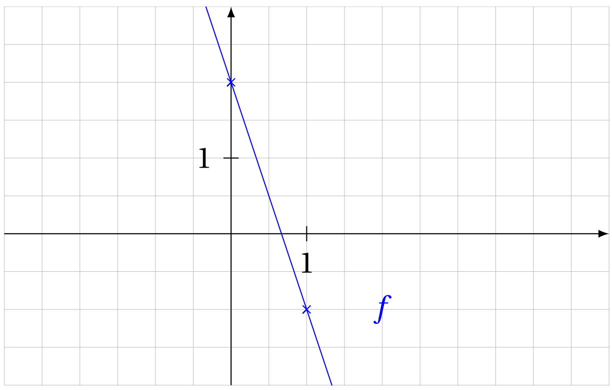
$$\begin{aligned} f(0) &= -3\times 0+2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= -3\times 1+2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

La droite qui représente la fonction f passe par les points de coordonnées $(0;2)$ et $(1;-1)$.

On peut éventuellement dresser un tableau de valeurs :

x	0	1
$f(x)$	2	-1

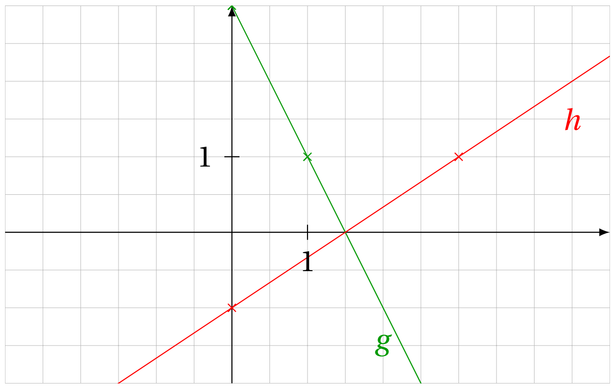


Exemple n° 3.

a) Représenter graphiquement les fonctions : $g : x \longmapsto -2x+3$ et $h : x \longmapsto \frac{2}{3}x-1$.

x	0	1
$g(x)$	3	1

x	0	3
$h(x)$	-1	1



b) Quelles sont les coordonnées des points d'intersection des deux droites ?

Les droites se coupent au point où $g(x) = h(x)$. On résout donc l'équation :

$$
\begin{aligned}
-2x+3 &= \frac{2}{3}x-1 \\
-2x-\frac{2}{3}x &= -1-3 \\
-\frac{6}{3}x-\frac{2}{3}x &= -4 \\
-\frac{8}{3}x &= -4 \\
x &= -\cancel{4}\times\frac{-3}{\cancel{4}\times 2} \\
x &= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Les droites se coupent donc au point d'abscisse $\frac{3}{2}$. Pour calculer l'ordonnée de ce point, il suffit de calculer l'image de $\frac{2}{3}$ par g ou h.

$$g(\frac{3}{2}) = h(\frac{3}{2}) = 0$$

Les droites se coupent donc au point de coordonnée $(\frac{3}{2};0)$.

2 Déterminer une fonction affine

2.1 Ordonnée à l'origine

Exemple : Quelle est la fonction affine telle que $f(0) = 7$ et $f(2) = 8$?

On sait que f est une fonction affine donc de la forme $f(x) = ax+b$. L'objectif est donc de trouver a et b.

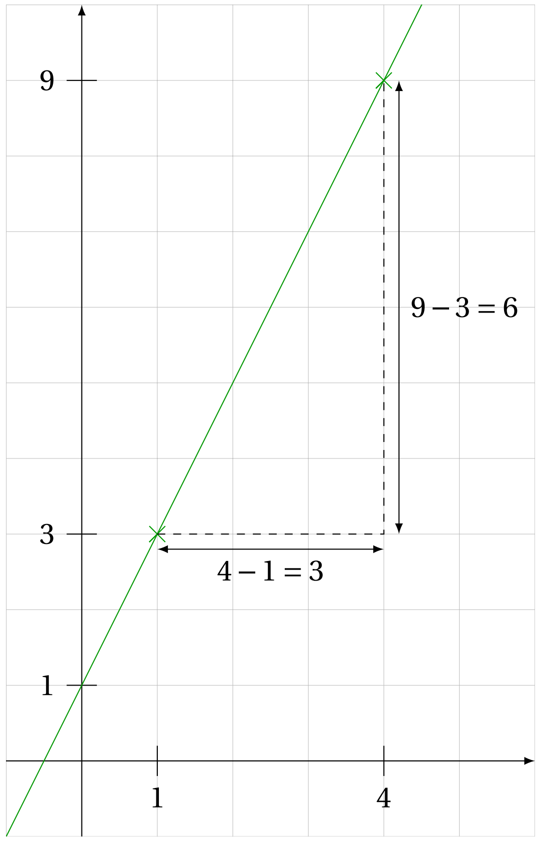
☞ On sait que : $f(0) = 7$
donc $a\times 0+b = 7$
et donc $b = 7$.

☞ Puis on calcule a (le coefficient directeur).

2.2 Coefficient directeur

Observons un exemple : soit f la fonction telle que $f : x \longmapsto 2x+1$.

D'une part $f(1) = 3$ d'autre part $f(4) = 9$. La droite représentant la fonction f passe donc par les points de coordonnées $(1;4)$ et $(4;9)$.



$$\frac{6}{3} = 2$$

Or 2 est le coefficient directeur de la fonction f. Il se calcule donc en effectuant :

$$\frac{f(4) - f(1)}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$$

Propriété
Soient x_1 et x_2 deux nombre distincts ($x_1 \neq x_2$). Le coefficient directeur a d'une fonction affine est défini par :

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Si maintenant nous reprenons l'exemple de départ : on cherche la fonction affine f telle que $f(2) = 7$ et $f(-1) = -8$.

On calcule directement a :

$$\begin{aligned} a &= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{7-(-8)}{2-(-1)} \\ &= \frac{15}{3} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Donc $f(x) = 5x + b$.

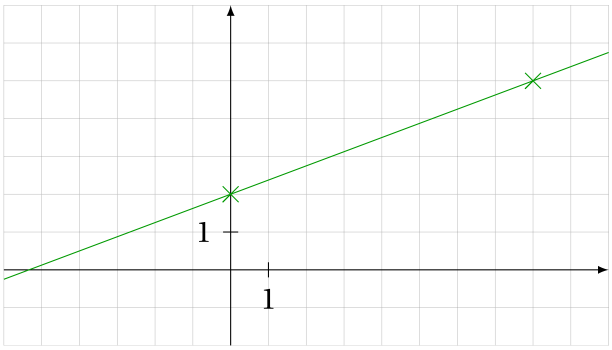
Il n'y a plus qu'à trouver b en utilisant soit $f(2) = 7$ soit $f(-1) = -8$ pour retrouver que $b = 3$.

Remarque. (*importante*) Graphiquement on sait déjà lire b (l'ordonnée à l'origine), on sait maintenant lire a.

Exemple :

a) Tracer la droite (d) représentant la fonction affine $f : x \longmapsto 3x - 2$

b) Déterminer graphiquement g.


1
1