Chapitre 8: Propriétés des triangles

1 Angles

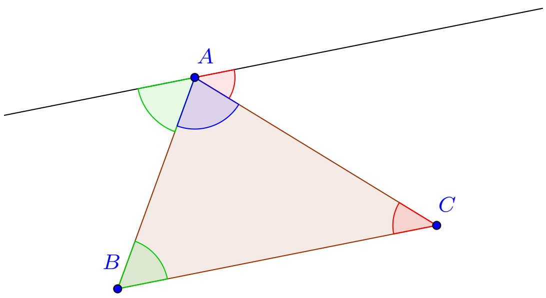
Exercice n° 1.

1. Construire un triangle quelconque et mesurer ses angles, puis additionner ces mesures.
2. On complète un tableau avec les résultats de la classe. Que constate-on ?

Théorème
La somme des angles d'un triangle est de 180°.

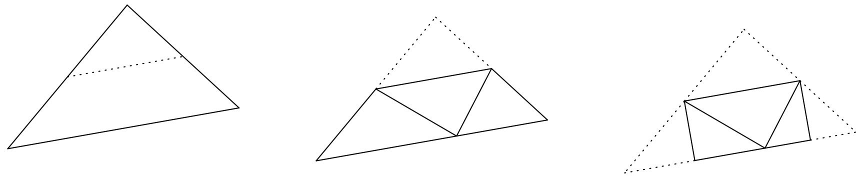
Démonstration. Cette démonstration a déjà été vue dans le chapitre « Angles et parallélisme » :

Soit ABC un triangle, on trace la parallèle à (BC) passant par A. Les angles alternes internes formés par les droites sécantes (AB) et (AC) sont égaux d'après une propriété bien connue du chapitre « Angles et parallélisme ». Et il vient que la somme des angle du triangle est égale à 180°.



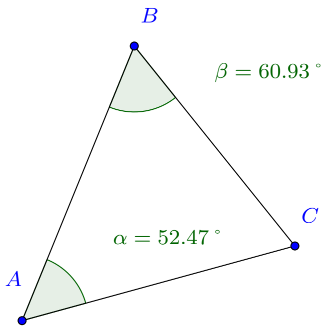
□

Remarque. Par pliage on peut visualiser le résultat précédent :



Exemple :

a) Calculer l'angle manquant :

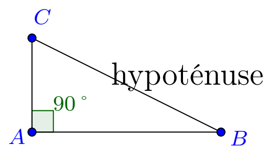


b) Soit DEF un triangle tel que : $\widehat{DEF} = 33°$ et $\widehat{EFD} = 51°$ donner la mesure de l'angle $\widehat{EDF}$.

c) Construire le triangle GHI tel que $GH = 4$cm, $\widehat{IGH} = 41°$, et $\widehat{GIH} = 24°$.

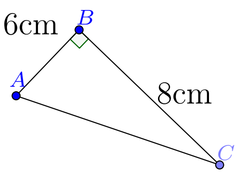
1.1 Triangle rectangle

Définition
On appelle *triangle rectangle* un triangle qui possède un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit est appelé *l'hypoténuse*.

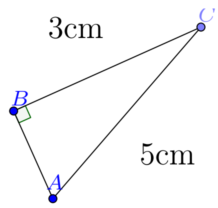


Exemple :

a) Construire en vraie grandeur :



b) Construire en vraie grandeur :



Si ABC est un triangle rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = 20°$calculez $\widehat{ACB}$.
Que peut-on dire des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$?

Propriété
Dans un triangle rectangle les angles aigus sont *complémentaires.*

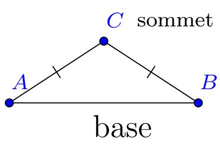
Réciproquement, un triangle dont deux angles sont complémentaire est rectangle.

Démonstration. Soit ABC un triangle rectangle en A, on sait que $\hat{A} = 90°$, or dans un triangle la somme des angles est égale à 180°, donc $\hat{B} + \hat{C} = 180 - \hat{A} = 90°$. □

Exemple : Soit ABC un triangle rectangle en C, tel que $\widehat{ABC} = 62°$. Donner la mesure de chacun de ses angles.

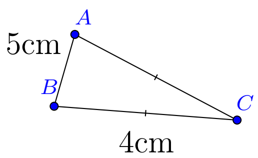
1.2 Triangle isocèle

Définition
On appelle *triangle isocèle* un triangle qui possède deux côtés de même longueur. Le côté non égal aux deux autres est appelé la *base.* L'angle opposé à la base est appelé le *sommet.*

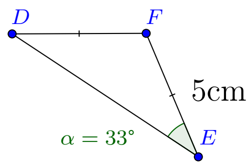


Exemple :

a) Construire en vraie grandeur :



b) Construire en vraie grandeur :

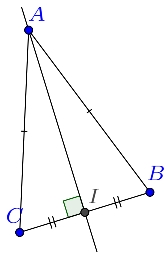


Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ dans l'exemple b) ? Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

Propriété
Dans un triangle isocèle les angles à la base sont égaux.

Réciproquement un triangle qui possède deux angles égaux est isocèle.

Démonstration.

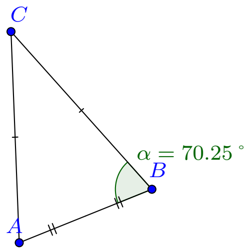


Soit ABC un triangle isocèle en A. On admettra qu'un triangle isocèle possède un axe de symétrie passant par son sommet et le milieu I de sa base.
Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont symétriques par rapport à la droite (AI).
Or la symétrie axiale conserve les angles, donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

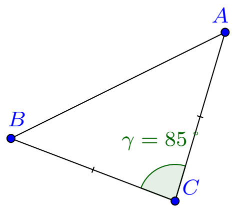
Pour la réciproque on construit la perpendiculaire à la base passant par son milieu (sa médiatrice), puis par égalités de triangles (un côté de même longueur et les deux angles adjacents deux à deux de même mesure) on montre que le sommet principal est nécessairement sur la médiatrice et qu'il est à égale distance des extrémités de la base. $\square$

Exemple :

a) Calculer les angles manquants :

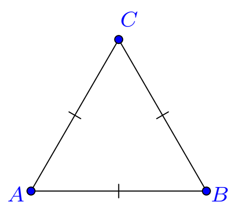


b) Calculer les angles manquants :



1.3 Triangle équilatéral

Définition
On appelle *triangle équilatéral* un triangle dont les trois côtés ont même longueur.



Exemple : Construire un triangle équilatéral de 3,6cm de côté.

Propriété
Dans un triangle équilatéral tous les angles sont égaux à 60°.

Démonstration. Soit ABC un triangle équilatéral. Les côtés AB et AC sont égaux, donc le triangle ABC est en particulier un triangle isocèle en A, or dans un triangle isocèle les angles à la base sont égaux, donc $\hat{B} = \hat{C}$. De même le triangle ABC est isocèle en B et $\hat{A} = \hat{C}$. De plus dans un triangle la somme des angles est égale à 180°, donc :

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180° \\ \hat{A} + \hat{A} + \hat{A} &= 180° \\ 3 \times \hat{A} &= 180° \\ \hat{A} &= \frac{180}{3} = 60° \end{aligned}$$

□

2 Inégalité triangulaire

2.1 Théorème

Exercice n° 2.

1. Tracer un triangle ABC tel que : $AB = 3,2$ cm ; $AC = 7,1$ cm ; $BC = 5$. Que dire du dernier sommet tracé ?

   Il y a deux possibilité de construire le sommet B. Mais les deux triangles sont symétriques, ils sont superposables, ils sont égaux.

2. Tracer un triangle DEF tel que : $DE = 2$ cm ; $EF = 5,3$ cm ; $DF = 3$ cm.

   Le point D n'existe pas car $2 + 3 < 5,3$.

3. Tracer un triangle GHI tel que : $GH = 2$ cm ; $HI = 3$ cm ; $GI = 5$ cm. Que dire de ce triangle ?

   Le point H est un point du segment $[GI]$, le triangle est constructible, on dit qu'il est "aplati" ou "plat".

Théorème *Inégalité triangulaire*
Dans un triangle la longueur de chaque côté est inférieur à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Si A, B, et C sont trois points quelconques, alors $AB + BC \geq AC$

Démonstration. Le plus court chemin pour aller d'un point à un autre est ... la ligne droite !

□

Pour qu'un triangle ABC existe il faut que :

$$\begin{cases} AB & \leq & AC + BC \\ AC & \leq & AB + BC \\ BC & \leq & AB + AC \end{cases}$$

2.2 Application : construire un triangle

Pour vérifier si un triangle est constructible on utilise plutôt cette propriété :

> **Propriété** *Importante*
> Pour qu'un triangle soit constructible, il faut et il suffit que la longueur du plus grand côté soit inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Démonstration. Si un triangle est constructible de côtés a, b, et c on a alors d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{cases} a & \leq & b+c & (1) \\ b & \leq & a+c & (2) \\ c & \leq & a+b & (3) \end{cases}$$

Supposons que a soit le plus grand côté la première inégalité donne directement que : $a \leq b+c$.

Réciproquement, si a est le plus grand côté et que $a \leq b+c$, on a la première inégalité. De plus : $b \leq b+c$ (car $c \neq 0$) a fortiori, $b \leq a+c$ (car $a \geq b$) ce qui donne la deuxième inégalité.
La troisième inégalité s'obtient de la même façon.
Et les trois inégalités ensembles garantissent la possibilité de construire le triangle. □

Exemple :

a) Peut-on construire un triangle ABC tel que $AB = 24,4$ cm, $AC = 34,8$ cm et $BC = 14,4$ cm ?

b) Un triangle dont les côtés mesurent 2,7 cm ; 6,9 cm ; 3,4 cm existe-il ?

c) Quelle longueur minimale faut-il donner au segment FE pour que le triangle DEF soit constructible ?
Hypothèses : $ED = 7,54$ cm ; $DF = 3,65$ cm.

2.3 Cas d'égalité

Dans les cas d'égalité, on construit un triangle plat, ses sommets sont alignés.

> **Propriété**
> A, B et C sont trois points : si $AB = AC + CB$ alors A, B, et C sont alignés dans cet ordre.
>
> ---
>
> Réciproquement, si trois points A, B et C sont alignés dans cet ordre, alors $AB = AC + CB$

Exemple :

a) On donne les longueurs suivantes : $AB = 4,6$ cm ; $BC = 12$ cm et $AC = 7,4$ cm. Montrer que les points A ; B et C sont alignés.

b) D, E et F sont des points tels que : $DE = 14,7$ cm ; $EF = 9,8$ cm et E est un point de $[DF]$. Calculez DF.