Chapitre 9 : Géométrie dans l'espace

Tout objet occupe une place dans l'espace : un *volume*.

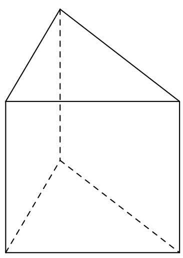
1 Les solides "non pointus"

1.1 Les prismes droits

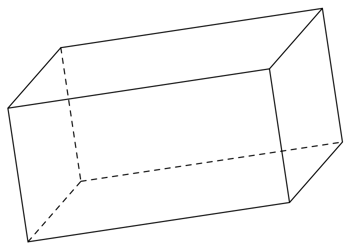
Définition
On appelle *prisme droit* un solide dont la base est un polygone et dont les faces latérales sont des rectangles.

Exemple :

a) Prisme droit à base triangulaire (6 sommets, 9 arêtes, 5 faces) :



b) Pavé droit (8 sommets, 12 arêtes, 6 faces) :



Remarque.

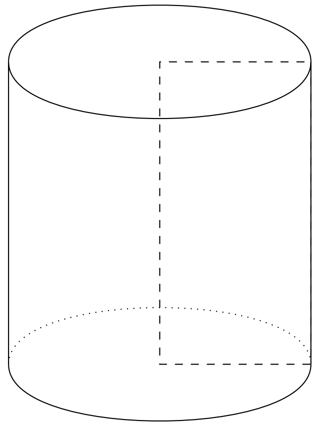
☞ L'aire totale d'un prisme droit s'obtient en ajoutant toutes les aires des faces.

☞ Le volume d'un prisme droit s'obtient en multipliant l'aire de la base par la hauteur :

$$V = B \times h$$

1.2 Les cylindres de révolution

Définition
Un *cylindre de révolution* est un solide obtenu en faisant tourner un rectangle autour de l'un de ses côtés.

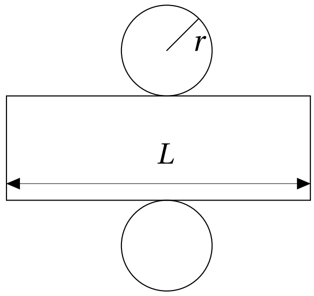


Remarque. Quelques formules :

- ☞ Périmètre de la base $P = 2\pi r$.
- ☞ Aire de la base $A_b = \pi r^2$.
- ☞ Aire latérale $A_l = 2\pi r \times h$.
- ☞ Volume $V = B \times h$.

Le patron d'un cylindre est composé de deux disques et d'un rectangle. La longueur du rectangle est proportionnelle au rayon du disque :

$$L = 2\pi r$$



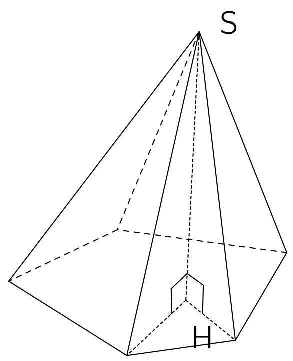
Remarque. Pour les solides "non pointus" le volume s'obtient en multipliant l'aire de la base par la hauteur :

$$\boxed{V = B \times h}$$

2 Solides "pointus"

2.1 Pyramides

Définition
Les *pyramides* sont des solides qui ont pour base des polygones, et pour faces latérales des triangles.



Cette pyramide a pour base un pentagone et pour sommet le point S.

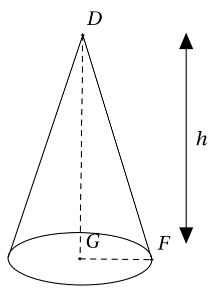
Elle a cinq faces triangulaires qui ont le point S en commun. $[SH]$ est la hauteur de la pyramide.

Remarque. Une pyramide est *régulière* si sa base est un polygone régulier (triangle équilatéral, carré, etc.) et des faces latérales sont des triangles isocèles.

Le volume d'une pyramide est donné par la formule : $V = \dfrac{B \times h}{3}$ où B est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.

2.2 Cônes de révolution

Définition
Un *cône de révolution* est un solide engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour de l'un des côtés adjacent à l'angle droit.



GFD est un triangle rectangle en G le cône a pour sommet D et pour hauteur $[GD]$.

Sa base est le disque de rayon $[GF]$.

Le segment $[DF]$ est une *génératrice* du cône.

Remarque. Le volume d'un cône est donné par la formule : $V = \dfrac{B \times h}{3}$ où B est l'aire du disque de base.

Remarque. On note que nos solides "pointus" ont pour volume le tiers du produit de l'aire de leur base par leur hauteur.

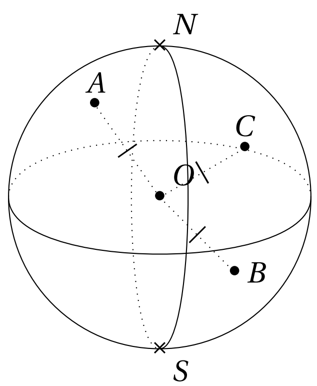
$$\boxed{V = \frac{B \times h}{3}}$$

3 Sphère et boule

3.1 Définition et repérage

Définition
Si O est un point du plan et R un nombre positif :

- La *sphère* de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance de O exactement égale à R.
- La *boule* de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace situés à distance du point O inférieure ou égale à R.
- Un grand cercle d'une sphère de centre O et de rayon R est un cercle de centre O et de rayon R.



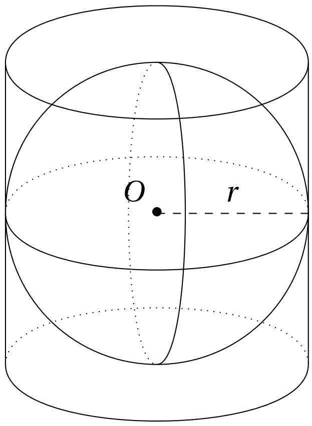
Remarque. Une sphère est un solide de révolution engendré par un cercle qui tourne autour de l'un de ses diamètres.

Si on imagine que la sphère correspond au globe terrestre, les point N et S seraient les pôles, le grand cercle qui passe par ces pôle serait un *méridien*, et le grand cercle perpendiculaire à l'axe des pôles, serait un *parallèle* : l'équateur.

3.2 Aire et volume

On considère une boule de rayon r qui rentre exactement dans un cylindre comme l'indique la figure ci-contre.

1. (a) Combien mesure le rayon du disque de base ?
   (b) Quelle est la hauteur du cylindre ?
   (c) Calculer l'aire du cylindre $\mathscr{A}_C$.
   (d) Calculer le volume $\mathscr{V}_C$ du cylindre.
2. Archimède parvint à trouver, sans le démontrer, que l'aire de la sphère était égale à l'aire latérale du cylindre et que le volume de la boule représentait les deux tiers du volume du cylindre.
   (a) Calculer l'aire de la sphère.
   (b) Calculer le volume de la boule.



Propriété
Soit $\mathscr{S}$ une sphère de centre O et de rayon r donnés. Le volume de la sphère est :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Démonstration. (admis) □