

Chapitre 8 : Fonctions linéaires

1 Introduction

Exemple : Un cinéma propose trois tarifs :

Tarif 1 : 5 € par séance ;

Tarif 2 : Une carte de 15 € pour l'année puis 3,5 € par séance ;

Tarif 3 : Une carte entrée illimitées pour 300 € par an.

- Tarif 1 :

Nombre de séances	1	5		10
Prix total à payer	5		30	

Le prix à payer est au nombre de séances :

$$\text{prix} = \dots \times \text{nombre de séances}$$

Si on note x le nombre de séances et y le prix à payer : $y = 5 \times x$.

- Tarif 2 :

Nombre de séances	1	5		10
Prix total à payer			39,5	

Le prix à payer dépend du nombre de séances.

Mais si l'on assiste à 2 séances on paye : $2 \times 3,5 + 15 = 7 + 15 = 22 \text{ €}$,

si l'on assiste à 4 séances on paye : $4 \times 3,5 + 15 = 14 + 15 = 29 \text{ €}$.

Le prix n'est pas au nombre de séances.

Si on note x le nombre de séances et y le prix à payer : $y = 3,5 \times x + 15$.

- Tarif 3 :

Nombre de séances	1	5		10
Prix total à payer			300	

Quel que soit le nombre de séances, le prix à payer est toujours de

Si on note x le nombre de séances et y le prix à payer : $y = 300$.

Le prix à payer ne dépend pas du nombre de séances, il est constant.

Définition

Deux grandeurs sont *proportionnelles* si on passe des valeurs de l'une à celles de l'autre en *multipliant par un facteur constant*. Ce nombre est appelé *coefficient de proportionnalité*.

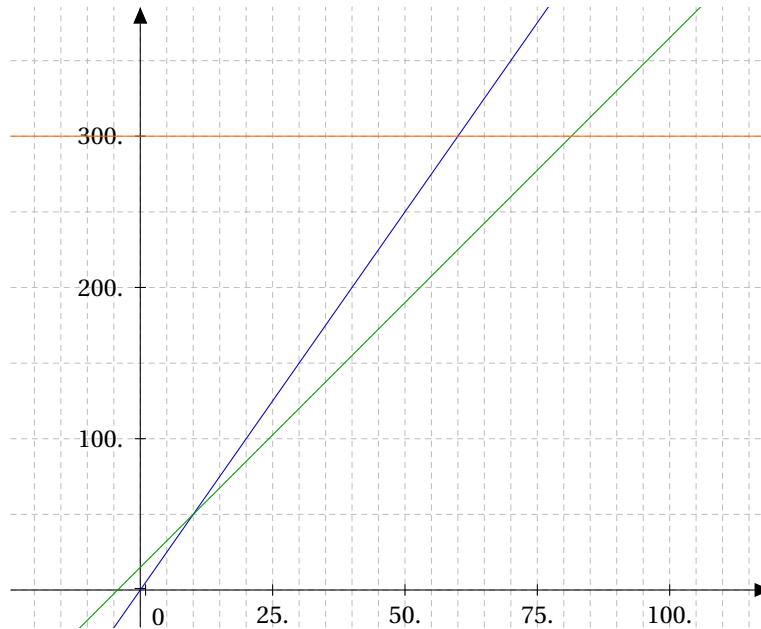
Si x est le nombre de séances et y le prix à payer.

Tarif 1 : $y = 5x$. On obtient une droite qui passe par

Tarif 2 : $y = 3,5x + 15$. On obtient une droite qui passe par

Tarif 3 : $y = 300$. On obtient une droite qui passe par

Graphiquement :



Le tarif 1 décrit une

Le tarif 1 décrit une

Le tarif 1 décrit une

2 Fonctions linéaires

2.1 Définition

Une *fonction linéaire* est une "machine à multiplier". Dans l'exemple, au tarif 1, on multiplie le nombre de séances par le prix à l'unité pour connaître le prix à payer :

$$\text{Prix à payer} = 5 \times \text{nombre de séances}$$

En notant y le prix à payer et x le nombre de séances, on obtient :

$$y = 5x$$

Définition

Si a est un nombre, le procédé qui à tout nombre x associe le nombre ax s'appelle une *fonction linéaire*.

Remarque.

- Une fonction linéaire décrit une situation de proportionnalité ;
- le nombre a est le coefficient de proportionnalité ;
- le nombre a est appelé *coefficient directeur* de la fonction.

Notations. x désigne un nombre quelconque. a est le coefficient directeur.

La fonction linéaire qui à tout x associe le nombre ax se note : $f : x \mapsto ax$ ou $f(x) = ax$.

2.2 Images, antécédents

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 3x$.

Calculer l'image de -5 par la fonction f c'est remplacer x par -5 dans $3x$:

$$f(-5) = 3 \times (-5) \quad -5 \text{ a pour image } -15 \text{ par la fonction } f.$$

$$f(-5) = -15 \quad -5 \text{ est l'antécédent de } -15 \text{ par la fonction } f.$$

Exemple : Calculer :

a) $f(2)$

b) $f(-4)$

c) $f(-\frac{1}{3})$

Autre question type : Quel est l'antécédent de 12 par la fonction f ?

Calculer un antécédent de 12 par la fonction f c'est chercher un nombre x qui a pour image 12 par cette fonction. On cherche donc x tel que :

$$f(x) = 12$$

$$3x = 12 \quad (\text{on remplace } f(x) \text{ par sa valeur et on résout une équation})$$

$$x = \frac{12}{3}$$

$$x = 4$$

On vérifie ensuite que $f(4)$ est bien égale à 12.

Exemple : Trouver les antécédents par f de :

a) -21

b) $\frac{6}{5}$

c) 4

2.3 Représentation graphique

Une fonction linéaire représente une situation de proportionnalité.

Propriété Important !

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine.

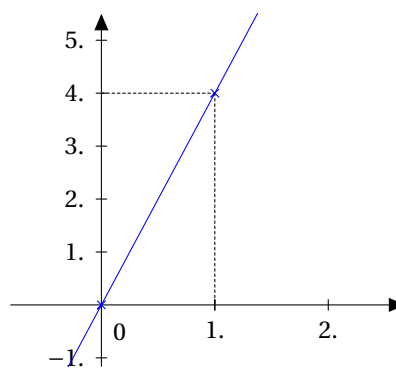
Exemple : Soit $f : x \mapsto 4x$. Pour tracer une droite il suffit de connaître deux points. La courbe représentative de f passe par l'origine il suffit donc de placer un point. On calcule l'image d'un nombre arbitraire (astucieux si possible) différent de 0.

Calculons l'image de 1 :

$$f(1) = 4 \times 1 = 4.$$

La droite qui représente f passe donc par le point (1;4).

x	0	1
$f(x)$	0	4



Exemple : Dans un repère tracer les droites d_1 , d_2 et d_3 représentant respectivement les fonctions f , g , et h .

a) $f: x \mapsto 2x$

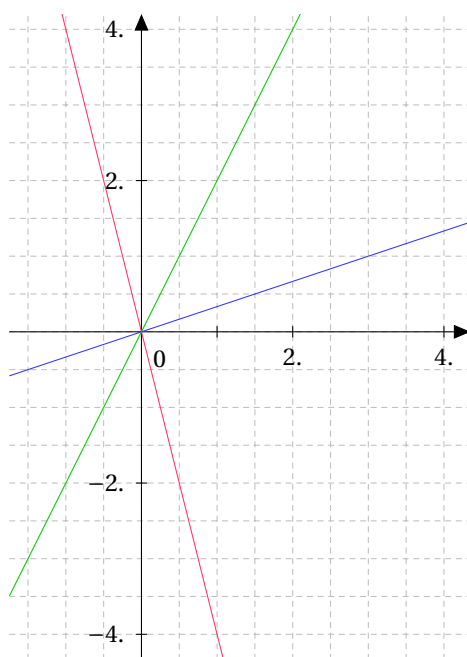
x	0	1
$f(x)$	0	2

b) $g: x \mapsto \frac{1}{3}x$

x	0	3
$g(x)$	0	1

c) $h: x \mapsto -4x$

x	0	1
$h(x)$	0	-4



2.4 Déterminer une fonction linéaire : coefficient directeur

Exemple : Quelle fonction linéaire associe 8 à 2 ?

On sait que : $f(2) = 8$. Il s'agit pour déterminer f de trouver le coefficient directeur de cette fonction.

On sait que toute fonction linéaire est de la forme : $f(x) = ax$.

Donc : $f(2) = a \times 2$

Or : $f(2) = 8$

Donc : $2a = 8$

$$a = \frac{8}{2} = 4$$

Le coefficient directeur de cette fonction est donc 4. Ainsi la fonction f est : $f: x \mapsto 4x$

Propriété

Soit f une fonction linéaire, de la forme $f(x) = ax$. Pour tout $x \neq 0$:

$$a = \frac{f(x)}{x}$$

Le coefficient directeur d'une fonction linéaire se calcul en divisant une image par son antécédent.

Exemple : Déterminer les fonctions linéaires g et h sachant que : $g(5) = -35$ et $h(4) = 5$.

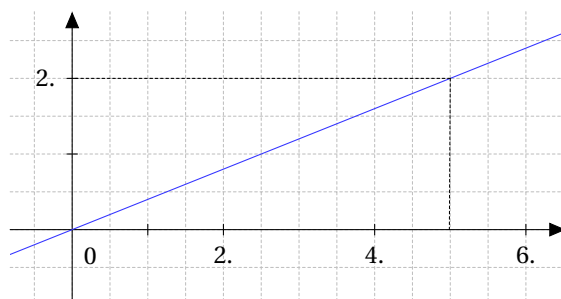
On sait que : g est linéaire, de la forme $g(x) = ax$.

$$g(5) = -35$$

$$\text{Donc : } a = \frac{-35}{5} = -7$$

$$\text{Et, } g : x \mapsto -7x.$$

Exemple : Déterminer la fonction f grâce à sa représentation graphique.



Le point de coordonnées (5;2) est sur la droite représentant f , donc :

$$f(5) = 2. \text{ On sait que } a = \frac{f(x)}{x} \text{ donc : } a = \frac{f(5)}{5} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{Ainsi : } f : x \mapsto \frac{2x}{5}.$$

Remarque. La dernière propriété permet de lire graphiquement le coefficient directeur d'une fonction (application du théorème de Thalès).

Méthode

- ☞ On cherche un "nœud" ;
- ☞ on lit ses coordonnées ;
- ☞ on en déduit a .

Exemple : Déterminer les fonctions g et h représentées par les droites d_1 et d_2 .

g est linéaire,

d'après le graphique, $g(2) = 1$.

$$\text{Donc } a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ainsi } g : x \mapsto \frac{x}{2}.$$

