Chapitre 6 : Statistiques

Introduction

Les statistiques sont l'étude de la collecte de données, leur analyse, leur traitement, l'interprétation des résultats et leur représentation afin de rendre les données compréhensible pour tous.
Une étude statistique comprend quatre parties :

1. Le sondage ou recueil de données ;
2. La présentation des résultats : comptage des effectifs, présentation en tableaux ou diagrammes ;
3. Le calcul des paramètres caractéristiques : fréquences, moyenne, médiane, étendue ;
4. L'exploitation : informations et conclusions que l'on tire de cette étude.

1 Rappel sur les pourcentages

Définition
Un pourcentage est un quotient de dénominateur 100. On le note %.

Remarque. On préfère utiliser l'écriture % dans une phrase en français. Pour les calculs on utilise l'écriture fractionnaire ou décimale correspondante.
Exemple :

- L'écriture de 4% représente le quotient $\frac{4}{100}$ ou $0,04$.
- l'écriture de 25% représente le quotient $\frac{25}{100}$ ou $0,25$.

1.1 Appliquer un pourcentage

Appliquer un pourcentage à une quantité, c'est multiplier par ce pourcentage par cette quantité.
Exemple :

a) Combien font 12% de 30€ ?

On effectue : $\frac{12}{100} \times 30 = 3,6$

12% de 30€font 3,6€.

b) Dans une classe de 24 élèves, 87,5% des élèves ont une activité à l'extérieur. Combien d'élèves cela représente-t-il ?

On effectue : $\frac{87,5}{100} \times 24 = 0,875 \times 24 = 21$

21 élèves ont une activité à l'extérieur.

1.2 Calculer un pourcentage

Exemple : Au cours d'un sondage, sur 1200 personnes interrogées sur leurs intentions de vote, 720 ont déclaré voter pour un même candidat. Quel pourcentage cela représente-t-il ?

Déterminer ce pourcentage c'est calculer combien de personnes voteraient pour ce candidat si le nombre de personnes interrogées étaient 100.

On peut dresser un tableau de proportionnalité :

Personnes votant pour le candidat	720	x
Total des personnes interrogées	1200	100

$$x = \frac{720 \times 100}{1200} = 60$$

.

60% des personnes interrogées ont voté pour ce candidat.

En pratique cela revient à trouver la fraction de dénominateur 100 égale à $\frac{720}{1200}$.

On calcule donc : $\frac{720}{1200} = 0,6 = \frac{60}{100}$.

Exemple : Un pot de yaourt de 125 g, contient 5 g de matières grasses. Quel pourcentage de matière grasses cela représente-il ?

$$\frac{5}{125} = 0,04 = \frac{4}{100}$$

Le pot de yaourt contient 4% de matières grasses.

1.3 Augmentations, réductions et pourcentages

1.3.1 Augmentations

Exemple : Un article qui coûte 38€subit une augmentation de 15%. Quel est son nouveau prix ?

Montant de l'augmentation : $\frac{15}{100} \times 38 = 5,7$

Nouveau prix : $38 + 5,7 = 43,7$.

Cela revient à calculer :

$$\begin{aligned} 38 + 38 \times \frac{15}{100} &= 38 \times 1 + 38 \times \frac{15}{100} \\ &= 38(1 + \frac{15}{100}) \\ &= 38 \times (1 + 0,15) \\ &= 38 \times 1,15 \\ &= 43,7 \end{aligned}$$

Ainsi augmenter de 15% revient à multiplier par $1 + \frac{15}{100}$ soit 1,15.

Méthode
Calculer *l'augmentation* de n% d'une grandeur x, c'est multiplier x par $1+\dfrac{n}{100}$.

Exemple :

a) Augmenter de 20% revient à multiplier par $1+\dfrac{20}{100}$ soit 1,2.

b) Dans un collège de 620 élèves, les effectifs ont été augmentés de 5%. Combien y-a-t-il d'élèves maintenant ?

c) Augmenter de 40%, c'est multiplier par : 1,4 ;

d) Augmenter de 7%, c'est multiplier par : 1,07 ;

e) Augmenter de 12,5%, c'est multiplier par : 1,125.

1.3.2 Réductions

Exemple : Un magasin brade ses articles en effectuant une remise de 40% sur leurs prix. Combien coûte un article dont le prix était de 120€ ?

Montant de la remise : $\dfrac{40}{100} \times 120 = 48$.
Nouveau prix : $120 - 48 = 72$.
Cela revient à calculer :

$$\begin{aligned} 120 - 120 \times \frac{40}{100} &= 120(1 - \frac{40}{100} \\ &= 120(1 - 0,4) \\ &= 120 \times 0,6 \\ & 72 \end{aligned}$$

Ainsi diminuer de 40% revient à multiplier par $1-\dfrac{40}{100}$ soit 0,6.

Méthode
Calculer la *diminution* de n% d'une grandeur x, c'est multiplier x par $1-\dfrac{n}{100}$.

Exemple :

a) Diminuer de 20% revient à multiplier par $1-\dfrac{20}{100}$ soit 0,8.

b) Lors d'une élection départementale, 820000 électeurs ont votés au premier tour. Au deuxième tour, il y a eu 8% d'électeurs en moins. Quel a été le nombre d'électeurs au deuxième tour ?

c) Baisser de 13%, c'est multiplier par 0,87 ;

d) Baisser de 4%, c'est multiplier par 0,96 ;

e) Baisser de 40,8%, c'est multiplier par 59,2.

Remarque. Les situations d'augmentation ou de diminution sont des situations de proportionnalité.

$$\text{quantité initiale} \times \text{coefficient} = \text{nouvelle quantité}$$

A partir de là on peut retrouver une quantité initiale ou calculer un coefficient :

$$\text{quantité initiale} = \frac{\text{nouvelle quantité}}{\text{coefficient}}$$

$$\text{coefficient} = \frac{\text{nouvelle quantité}}{\text{quantité initiale}}$$

Exemple :

1. Un article coûtait 47€. Son prix augmente de 8%. Combien coûte-t-il maintenant ?

2. Un article coûte 5,4€après une augmentation de 20%. Quel était son prix initial ?

3. Un article qui coûtait 20€coûte 24,60€après augmentation. Quel est le pourcentage de cette augmentation ?
$$\frac{24,6}{20} = 1,23$$
L'augmentation est de 12%.

4. Un article qui coûtait 2,10€coûte 1,50€après une réduction. Quel est le pourcentage de cette réduction ?
$$\frac{1,5}{2,1} \approx 0,71$$
De plus $100 - 0,71 = 29$. La réduction était d'environ 29%.

2 Statistiques

2.1 Vocabulaire

Définition
La statistique descriptive désigne en mathématique l'ensemble des méthodes permettant de produire, et d'étudier des *données*.
On étudie sur une *population* un *caractère* qui peut prendre différentes *valeurs*.

Remarque. Le caractère étudié peut être *quantitatif* (on peut le mesurer) ou *qualitatif* (il ne se mesure pas).

Exemple n° 1. Imaginons qu'on interroge une classe sur le sport préféré de ses élèves. On obtient : foot ; basket ; foot ; danse ; danse ; foot ; foot ; foot ; basket ; foot ; tennis ; tennis ; foot ; danse ; patinage artistique ; basket ; danse ; foot ; basket ; basket.

- La *population* est l'ensemble des élèves.
- Chaque élève est un *individu* qui fournit une *donnée*.
- Le *caractère* étudié ici est *qualitatif*, c'est le sport préféré des élèves.
- Les *valeurs* possibles sont ici : foot ; basket ; tennis ; danse ; patinage artistique.

Remarque. Ne pas confondre *valeur* et *donnée*.
Exemple : Il y a ici 20 données et seulement 5 valeurs.

Définition
L'effectif d'une valeur est le nombre de données égale à cette valeur.
L'effectif total est le nombre total de données.

Exemple : Dans l'exemple précédant, on peut dresser un tableau des effectifs :

Valeurs :	foot	tennis	basket	danse	patinage artistique	Total
Effectif :	8	2	5	4	1	20

2.2 Fréquences

Définition
La *fréquence* d'une valeur est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total.

Exemple :
Toujours avec l'exemple précédant, la fréquence de la valeur foot est :

$$\frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$$

Propriété
La fréquence d'une valeur est un nombre compris entre 0 et 1.

Démonstration. Soit f une fréquence associée à une valeur fixée d'effectif n, l'effectif total est noté N.

$$\begin{array}{lccccc} \text{On sait que :} & 0 & \leq & n & \leq & N \\ & 0 & \leq & \dfrac{n}{N} & \leq & \dfrac{N}{N} = 1 \\ & 0 & \leq & f & \leq & 1 \end{array}$$

□

On peut regrouper les effectifs et les fréquences dans un même tableau (en reprenant toujours le même exemple) :

Valeurs	foot	tennis	basket	danse	patinage artistique	Total
Effectifs	8	2	5	4	1	20
Fréquences	0,4	0,1	0,25	0,2	0,05	1

L'intérêt d'une étude par effectifs, ou en fréquence peut être illustré par l'exercice suivant :

Exemple n° 2. Dans un quartier se trouvent deux bibliothèques.

Bibliothèque 1	Policiers	Aventure	Science-fiction	Total
Effectifs	35	212	185	432
Fréquences	0,08	0,49	0,43	1

Bibliothèque 2	Policiers	Aventure	Science-fiction	Total
Effectifs	786	872	283	1941
Fréquences	0,4	0,45	0,15	1

1. Dans quelle bibliothèque ira Jules s'il est passionné de science-fiction ?
2. Quelle bibliothèque est tenue par un passionné de science-fiction ?

2.3 Classes

Lorsque le caractère étudié est quantitatif, on dit qu'il est *discret* si ce caractère peut prendre un nombre fini de valeurs. On dit qu'il est *continu* s'il peut prendre toutes les valeurs possibles entre deux nombres donnés.

En pratique
Lorsque les valeurs sont numériques, et nombreuses, il peut-être pratique de les regrouper en *classes*.
La taille d'une classe est appelée son *amplitude*.

Exemple n° 3. Les élèves d'une classe ont été mesurés, leurs tailles apparaissent ici :
1,35 ; 1,42 ; 1,54 ; 1,47 ; 1,37 ; 1,40 ; 1,50 ; 1,35 ; 1,34 ; 1,47 ; 1,45 ; 1,50 : 1,44 ; 1,32 ; 1,39 ; 1,40 ; 1,46 ; 1,48 ; 1,43 ; 1,42 ; 1,42 ; 1,37 ; 1,44 ; 1,49 ; 1,44 ; 1,37 ; 1,53 ; 1,32 ; 1,39 ; 1,35
On représente les effectifs en regroupant les valeurs dans des classes de même amplitude (ici 5cm) :

Taille t (en m)	$1,30 \leq t < 1,35$	$1,35 \leq t < 1,40$	$1,40 \leq t < 1,45$	$1,45 \leq t < 1,50$	$1,50 \leq t < 1,55$
Effectifs	3	8	9	6	4

2.4 Etendue

Définition
L'étendue d'une série statistique est la différence entre la valeur la plus grande et la valeur la plus petite de cette série.

Exemple n° 4. On relève la température en °C pendant 10 jours dans un village : 12 ; 11 ; 8 ; 6 ; 12 ; 13 ; 12 ; 14 ; 15 ; 9 ; 7. Calculer l'étendue de cette série.

Remarque. L'étendue d'une série statistique est l'une des *caractéristique de dispersion* de cette série.

2.5 Moyenne

Définition
La *moyenne* d'une série statistique est égale au quotient de la somme des données de la série par l'effectif total.

Exemple n° 5. On a pesé sept sachets de sel, on a obtenu : 114g ; 122g ; 126g ; 111g ; 115g ; 116g ; 122g.
La moyenne de cette série est :

$$\frac{144 \text{ g.} + 122 \text{ g.} + 126 \text{ g.} + 111 \text{ g.} + 115 \text{ g.} + 116 \text{ g.} + 122 \text{ g.}}{7} = 118 \text{ g.}$$

Remarque. La moyenne est la masse que pèserait chaque sac si tous les sacs étaient identiques.

Remarque. Cette moyenne est appelée moyenne arithmétique. On peut également la pondérer en appliquant des coefficients aux différentes données.

Exemple : Un élève a obtenu les notes suivantes : 10,5 ; 14 et 15,5 en DS ; 13 ; 15 et 8 en interrogation de cours. Les DS sont affectés d'un coefficient 3. Calculer la moyenne de l'élève.

Si les valeurs sont regroupées par classes on peut calculer une valeur approchée de la moyenne en utilisant le centre de chaque intervalle.

Exemple : On a regroupé les tailles des élèves d'une classe par intervalle. Calculer la moyenne de leur taille.

Taille (cm)	$[140;150[$	$[150;160[$	$[160;170[$	$[170;180[$
Effectifs	6	10	9	5

2.6 Médiane

Définition
Une *médiane* d'une série statistique est une valeur telle qu'il y ait :

- au moins la moitié des valeurs inférieures ou égales à cette médiane ;
- au moins la moitié des valeurs supérieures ou égales à cette médiane.

Exemple : On classe par ordre croissant les sachets de sel précédents, la médiane est la valeur centrale :

$$111 \quad 114 \quad 115 \quad 116 \quad 122 \quad 122 \quad 126$$

La médiane est 116.

Remarque. Si les valeurs sont en nombre pair, on peut prendre la demi-somme des valeurs centrales :

$$111 \quad 114 \quad 115 \quad 116 \quad 118 \quad 122 \quad 122 \quad 126$$

La mediane est : $\dfrac{116+118}{2} = 117$

Remarque. La moyenne et la médiane sont des *caractéristiques de position* de la série statistique.

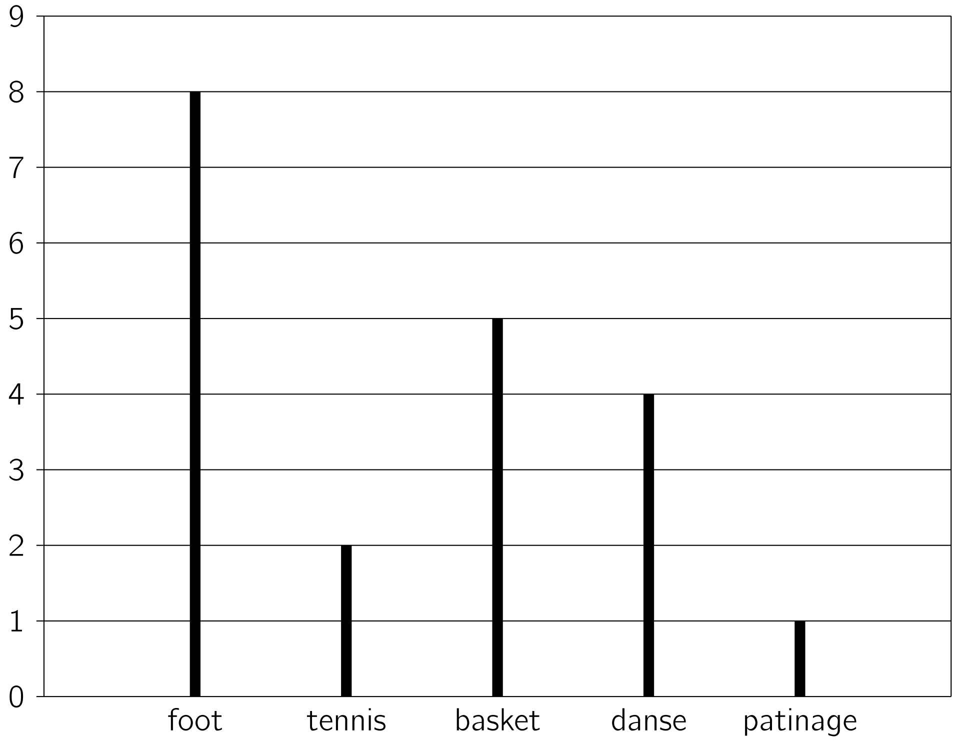
3 Représentation de données statistiques

Il y a plusieurs façons de représenter des données statistiques.

3.1 Diagrammes en bâtons

On peut représenter des données grâce à un *diagramme en barre* : dans ce cas, les hauteurs des bâtons sont proportionnelles aux effectifs de chaque valeurs. Leur largeur importe peu, pour plus de lisibilité on veille a utiliser des largeurs identiques pour chaque bâton.

Exemple : L'exemple **??** est représenté ici avec un diagramme en bâtons :

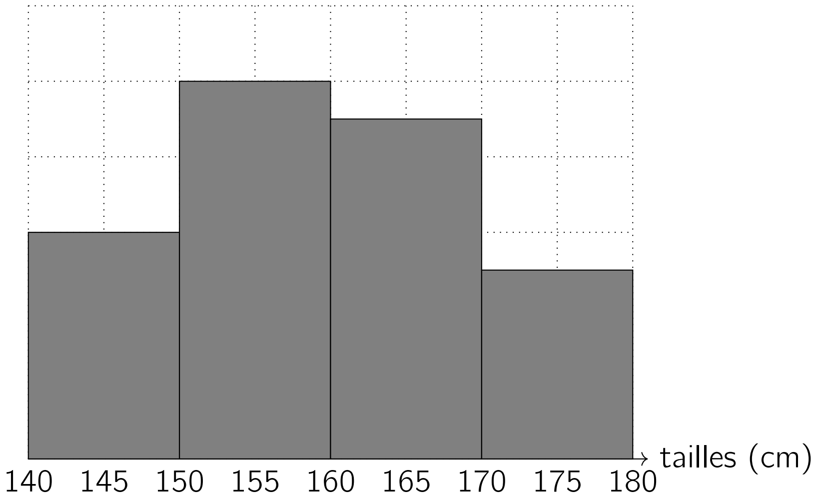


3.2 Histogramme

Pour des données numérique regroupées en classes, on peut utiliser un *histogramme* : l'aire de chaque barre est proportionnelle à l'effectif de la classe correspondante.

Remarque. Si les classes ont même amplitudes, les hauteurs des barres sont proportionnelles aux effectifs des classes correspondantes.

Exemple : En reprenant l'exemple **??** on représente les tailles d'élève comme suit :



3.3 Diagramme circulaires

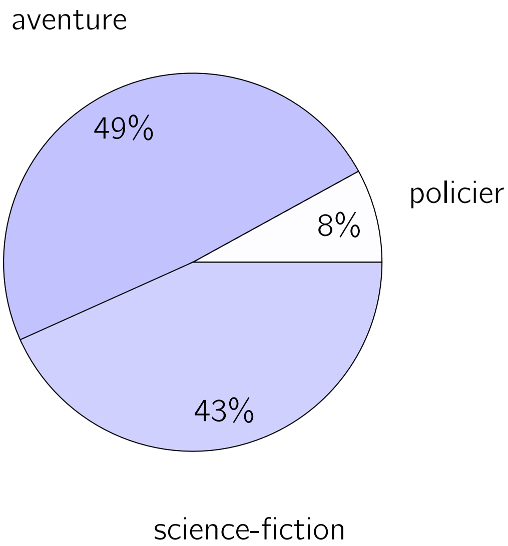
On peut représenter des données grâce à un *diagramme circulaire* : les mesures des angles de chaque secteur sont proportionnelles aux effectifs de chaque valeur.

Exemple : On représente les effectifs des bibliothèques 1 et 2 de l'exercice 1 par des diagrammes circulaires :

Pour déterminer l'angle correspondant à un secteur, on effectue le calcul suivant :

	Total	Valeur choisie
Effectif	N	n
Mesure	360	$\alpha = \dfrac{n \times 360}{N}$

bibliothèque 1



bibliothèque 2