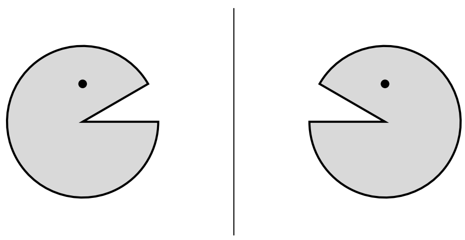
Chapitre 4 : Transformations

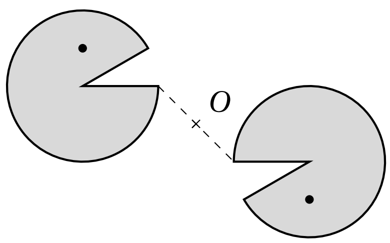
1 Rappels

1.1 Isométries

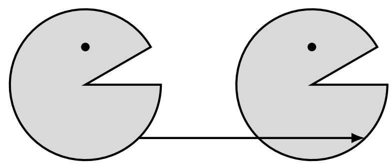
1. Symétrie axiale :



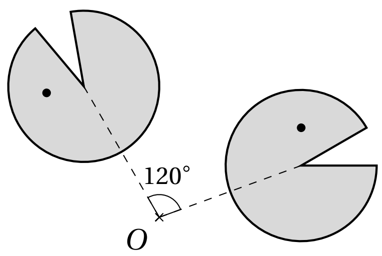
2. Symétrie centrale :



3. Translation :



4. Rotation :



Propriété
Toutes ces transformations sont des *isométries* : elles conservent les mesures.

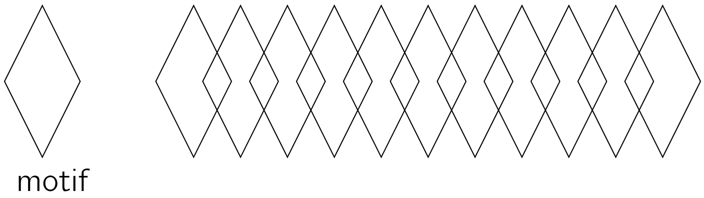
Démonstration. (admis) □

Remarque. La conservation des mesures concerne :

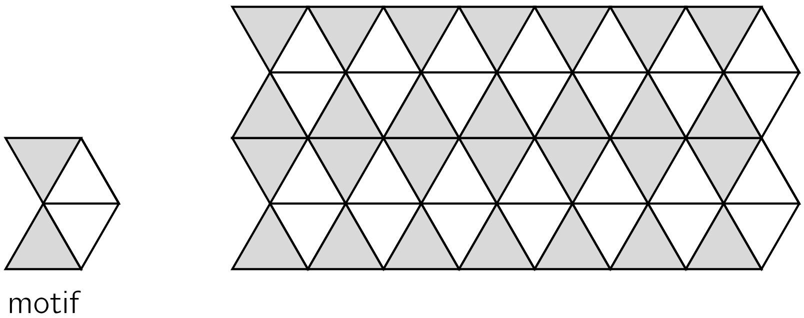
- les longueurs (donc les périmètres et aires de figures) ;
- les angles (donc les alignements et parallélismes de figures).

1.2 Applications

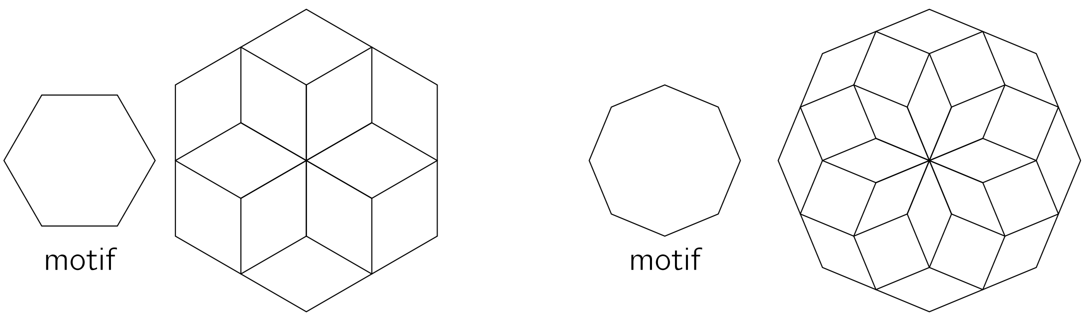
Définition
Une *frise* est constituée d'un motif reproduit par une translation.



Définition
Un *pavage* est constitué d'un motif reproduit par deux translations qui recouvre le plan.



Définition
Une *rosace* est constituée d'un motif reproduit par rotation.

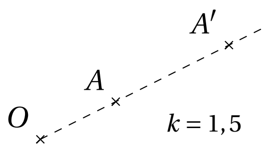


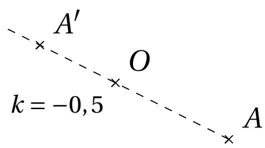
2 Homothéties

2.1 Définition

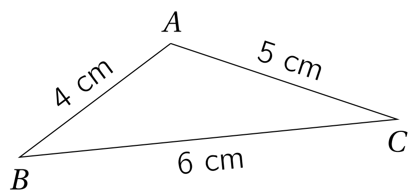
Définition
Etant donné un point O, un point A et un nombre k, l'image de A par *l'homothétie* de centre O et de rapport k est le point A' tel que :

- si $k \geq 0$, le point A' appartient à $[OA)$ et $OA' = k \times OA$;
- si $k \leq 0$, les points A, O et A' sont alignés dans cet ordre, et $OA' = -k \times OA$.





Exemple : Construire l'image de ABC par les homothéties de centre C, et de rapport 1,5 et -0,75.



2.2 Propriétés

Propriété
L'image d'un segment par une homothétie est un segment parallèle.

Démonstration. On utilise la pseudo-réciproque du théorème de Thalès. □

Propriété
L'image d'un angle par une homothétie est un angle de même mesure.

Démonstration. On peut s'appuyer sur la propriété précédente. □

Remarque. Une homothétie conserve les alignement et les angles.

Propriété
Si une figure F' est l'image d'une figure F par une homothétie de rapport $\pm k, (k \geq 0)$:

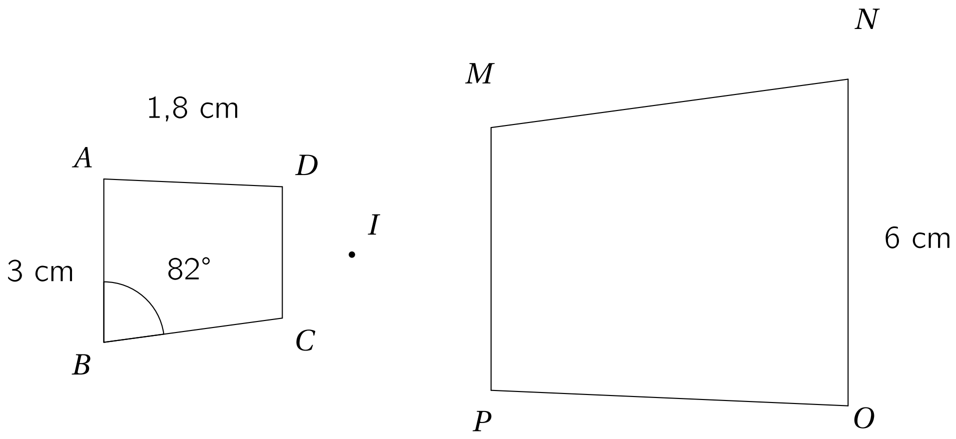
- Les longueurs de F et F' sont proportionnelles (de rapport k) ;
- L'aire de F' s'obtient en multipliant celle de F par k^2.

Démonstration. Le premier point est immédiat, le second nécessite une disjonction de cas. On se limite aux figures usuelles (cercles, polygones) en décomposant éventuellement les polygones en triangles. □

Remarque. Si $-1 \leq k \leq 1$ l'homothétie est une *réduction*, si $k \leq -1$ ou $1 \leq k$ l'homothétie est un *agrandissement*.

2.3 Applications

Exemple : Le trapèze $MNOP$ est l'image de $ABCD$ par l'homothétie de centre I :



1. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{MNO}$;
2. Calculer la longueur OP, justifier.