

Chapitre 3 : Calcul littéral

Le calcul littéral est une façon de calculer utilisant des lettres. Une *expression littérale* est une suite d'opérations où figurent des chiffres et des lettres.

1 Rappels

1.1 Réduire une expression

Définition

Réduire une expression c'est la simplifier en calculant ce qu'il est possible de calculer.

Exemple :

a) $x + x + x$

c) $3x \times 3y$

e) $4x \times (-3z)$

b) $3 \times x \times y$

d) $4x - 5x$

f) $3x + 3y$

$$\begin{aligned} A &= -5x \times x + 3 \times x - 8x \times (-x) + 6 \times x \\ &= 3x^2 + 9x \quad \text{expression réduite ordonnée.} \end{aligned}$$

1.2 Calculer la valeur d'une expression

Exemple : $A = -x^3 + 3x^2 - 2x + 3$.

On peut nommer une expression (souvent à l'aide d'une lettre majuscule).

Calculer A pour $x = -1$ et $x = 10$.

2 Développer

Définition

Développer c'est transformer un produit en somme.

Idée mnémotechnique : *Développer* c'est enlever une enveloppe, en maths les parenthèses. Pour supprimer les parenthèses dans une expression il faut respecter quelques propriétés.

2.1 Signes

Remarque. *parenthèses précédées d'un +*

On peut supprimer des parenthèses précédées d'un + sans changer leur contenu si elles ne sont pas suivies d'une multiplication.

Exemple : $A = 3x^2 + (x^2 - x + 3) + (-5x^2 + 2x - 1)$

Propriété *parenthèses précédées d'un -*

Lorsque l'on supprime des parenthèses précédées d'un - on doit changer les signes de chacun des termes de cette parenthèse.

Exemple : $B = 5x^2 - (-4x^2 + 3x - 6) - (4x^2 + 5)$

2.2 Distributivité simple

Calculer de deux façons $4(3 + 7)$:

- Par priorités :

$$\begin{aligned}4(3 + 7) &= 4 \times 10 \\ &= 40\end{aligned}$$

- Par distributivité :

$$\begin{aligned}4(3 + 7) &= 4 \times 3 + 4 \times 7 \\ &= 12 + 28\end{aligned}$$

Propriété distributivité simple

Si k , a , et b sont trois nombres : $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$.

Pour supprimer les parenthèses précédées d'une multiplication et qui contiennent des additions ou des soustractions, on *distribue* le facteur qui précède sur chacun des termes de la somme.

Exemple :

$$A = -7(x + 2)$$

$$B = 3(-2x - 4)$$

$$C = -9(2x^2 - 5x - 8) - x(2x + 1)$$

$$D = 2x(-x + 5) - 4(5x^2 - x - 7)$$

$$E = 7x(-x + 1) - (3x^2 + x - 7) + (x - 3)$$

2.3 Distributivité double

Calculer de deux façons $(5+3)(2+7)$:

- Par priorités :

$$\begin{aligned}(5 + 3)(2 + 7) &= 8 \times 9 \\ &= 72\end{aligned}$$

- Par distributivité :

$$\begin{aligned}(5 + 3)(2 + 7) &= (5 + 3) \times 2 + (5 + 3) \times 7 \\ &= 5 \times 2 + 3 \times 2 + 5 \times 7 + 3 \times 7 \\ &= 10 + 6 + 35 + 21 = 72\end{aligned}$$

Propriété la double distributivitéSi a , b , c et d sont des nombres relatifs,

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Démonstration. On distribue le facteur $(a + b)$ sur la somme $c + d$:

$$\begin{aligned} (a + b)(c + d) &= (a + b) \times c + (a + b) \times d \\ &= c(a + b) + d(a + b) && \text{(commutativité de la multiplication)} \\ &= ca + cb + da + db && \text{(distributivité simple)} \\ &= ac + ad + bc + bd && \text{(commutativité de l'addition et de la multiplication).} \end{aligned}$$

□

Exemple : Calculer de deux façons.

A = $(4 + 3)(7 + 2)$

B = $(4 - 3)(7 + 2)$

C = $(-4 - 3)(-7 + 2)$

Exemple : Développer.

D = $(x + 1)(x + 2)$

F = $(5x + 2)^2$

E = $(2x + 3)(7x - 2)$

G = $(-x - 3)(1 - 7x)$

3 Application

3.1 Carré d'une somme

PropriétéSi a et b sont des nombres, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.*Démonstration.*

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

□

Exemple : Développer.

a) $(x + 3)^2$

b) $(x + 7)^2$

c) $(5x + 8)^2$

3.2 Carré d'une différence

PropriétéSi a et b sont des nombres, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

□

Exemple : Développer.

a) $(x-7)^2$

b) $(x-1)^2$

c) $(3x-11)^2$

3.3 Produit d'une somme et d'une différence

Propriété

Si a et b sont deux nombres, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Exemple : Développer.

a) $(x+3)(x-3)$

b) $(x+5)(x-5)$

c) $(3x+11)(3x-11)$

Exemple : Calculer mentalement.

a) 101×99

b) 31×29

c) 17×13

3.4 Problèmes utilisant la distributivité

Exemple : Voici deux programmes de calcul :

- Choisir un nombre ;
- soustraire 1 ;
- élever au carré le résultat.

- Choisir un nombre ;
- l'élever au carré ;
- soustraire le double du nombre de départ ;
- ajouter 1.

1. Tester les deux programmes en choisissant 4 puis -7 pour nombre de départ.
2. On note x le nombre de départ, exprimer le résultat de chaque programme en fonction de x .
3. Montrer que les deux programmes donnent toujours le même résultat.