Chapitre 2 : Puissances

1 Puissance entières

Définition
Soit a un nombre relatif, n un entier positif.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

On lit "a exposant n", l'entier n est appelé l'exposant de la puissance de a.
Remarque. Par convention $a^0 = 1$.
Exemple :

a) 4^2
b) 3^4
c) $(-2)^2$
d) $(-2)^3$
e) -2^2

$$\begin{array}{ll} 2^1 = 2 & (-2)^1 = -2 \\ 2^2 = 4 & (-2)^2 = 4 \\ 2^3 = 8 & (-2)^3 = -8 \\ 2^4 = 16 & (-2)^4 = 16 \\ 2^5 = 32 & (-2)^5 = -32 \end{array}$$

Remarque. Le résultat est en général positif sauf pour un négatif avec un exposant impaire.
Exemple : Compléter avec les signes : < 0 ou > 0.

a) $(-3)^3$
b) $(-5)^6$
c) $(-4)^7$
d) 5^{12}
e) 4^7
f) $-(-6)^8$

2 Règles de calcul

$$2^3 \times 2^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

Propriété *Produit de puissances*
Soient a un nombres relatifs, m et n deux entiers positifs.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Exemple : Ecrire sous forme d'une seule puissance :

a) $4^5 \times 4^7$ b) $5^2 \times 5 \times 5^{11}$ c) $x^5 \times x^9$

Propriété *puissance de puissance*
Soient a un nombres relatifs, m et n deux entiers positifs.

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

Exemple : Ecrire sous la forme d'une seule puissance :

a) $(4^2)^3$ b) $((-5)^3)^6$ c) $-(6^3)^5$

Propriété *puissance de produit*
Soient a et b deux nombres relatifs, n un entier positif.

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Si $b \neq 0$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exemple : Calculer $\left(\frac{(-2)}{(+3)}\right)^3$; $\left(\frac{4}{3}\right)^2$; $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$.

On peut utiliser cette propriété pour décomposer un nombre en facteurs premiers :

Exemple : $44^5 = (2^2 \times 11)^5 = (2^2)^5 \times 11^5 = 2^{10} \times 11^5$

Remarque. Attention : $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ et $(a-b)^n \neq a^n - b^n$.

3 Puissances négatives

Si l'exposant est négatif, on souhaite que la propriété 1 soit toujours valables, on doit donc pouvoir écrire :

$$a^n \times a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

Ainsi a^{-n} est l'inverse de a^n. D'où la définition suivante.

Définition
Soit a un nombre relatif *non nul*, n un entier positif.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n facteurs}}$$

Exemple :

a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$

b) $(-5)^{-3}$

c) $(-3)^{-2}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

Remarque. En particulier, si a est non nul, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ et on peut aussi écrire $\frac{b}{a} = ba^{-1}$. Ceci explique la notation physique des unités, la vitesse par exemple peut s'exprimer en km/h ou km.h^{-1}.

Exemple : Ecrire sous forme d'une seule puissance.

a) $\dfrac{5^2}{5^7}$

b) $\dfrac{7^{-3}}{7^{-2}}$

c) $\dfrac{5^{-1}}{5^{-2}}$

d) $\dfrac{x^8 \times (x^2)^4}{x^2}$

e) $x^{-3} \times x^9 \times (x^{-5})^2$

f) $(3^{-4})^2 \times 3^{-5}$

4 Applications

4.1 Puissances de dix

Si n est un nombre entier naturel,

- $10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = 1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ zéros}}$
- $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} = \dfrac{1}{1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ zéros}}} = \underbrace{0,00\ldots0}_{n \text{ zéros}}1$

Exemple :

a) $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

b) $10^5 = 100000$

c) $10^{-2} = \dfrac{1}{10 \times 10} = \dfrac{1}{100} = 0,01$

d) $10^{-6} = 0,000001$

Simplifier puis donner l'écriture décimale :

e) $10^3 \times 10^2$

f) $\dfrac{10^7}{10^5}$

g) $10^{-6} \times 10^8$

h) $10^{-2} \times 10^{-4}$

i) $\dfrac{1}{10^3} \times \dfrac{1}{10^3}$

j) $\dfrac{1}{10^{-5}} \times \dfrac{1}{10^3}$

Règle

☞ Multiplier par une puissance positive de 10, c'est décaler la virgule vers la droite d'autant de rang que l'indique l'exposant ;

☞ multiplier par une puissance négative de 10, c'es décaler la virgule vers la gauche d'autant de rang que l'indique l'exposant.

Exemple : Calculer.

a) 72×10^2

b) $7,205 \times 10^2$

c) $0,08795 \times 10^4$

d) $-74,45 \times 10^3$

e) 727×10^{-2}

f) 959583×10^{-4}

Exemple n° 1. Ecrire sous la forme d'une seule puissance.

a) $10^5 \times 10 \times 10^{-3}$

b) $\dfrac{10^{-9}}{10^{-1}}$

c) $\dfrac{10^3 \times (10^{-2})^4 \times 10^5}{10^6 \times (-10^{-1})^3}$

4.2 Notations scientifiques

Définition
On appelle *écriture scientifique* d'un nombre (non nul) son écriture sous la forme $a \times 10^n$ où : $1 \leq a < 10$ et n est un entier relatif.

Exemple : Ecriture scientifique ou non ?

a) $0,452 \times 10^2$

b) $75,3 \times 10^5$

c) $4,7 \times 10^{-2}$

d) $-4,02 \times 10$

e) 7

Exemple : Donner l'écriture scientifique.

a) $0,452$

b) $345,2$

c) 3411

d) $0,0000232$

e) $\frac{1}{2}$

Exemple n° 2. Calculer puis donner l'écriture scientifique.

$$\begin{aligned} A &= \frac{7 \times (10^{-3})^2 \times 8}{14 \times 10^{-10} \times 5} \\ &= \frac{7 \times 8}{14 \times 5} \times \frac{(10^{-3})^2}{10^{-10}} \\ &= \frac{4}{5} \times 10^4 \\ &= 8 \times 10^3 \end{aligned}$$

4.3 Préfixes et puissances de 10

	Plus grand que l'unité						Plus petit que l'unité					
Préfixe	terra	giga	méga	kilo	hecto	déca	déci	centi	milli	micro	nano	pico
Symbole	T	G	M	K	h	da	d	c	m	μ	n	p
Puissance de 10	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}