Chapitre 1 : Théorème de Thalès

1 Introduction

1.1 Quotient égaux

Propriété
Soient a, b, c et d sont des nombres tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$.
Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, alors $a \times d = b \times c$.

Réciproquement, si $a \times d = b \times c$, alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

Démonstration. On rappelle qu'on ne change pas une égalité si on effectue la même opération de chaque côtés du signe égal.

Supposons que : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, alors $\dfrac{a}{\cancel{b}} \times \cancel{b} \times d = \dfrac{c}{\cancel{d}} \times b \times \cancel{d}$. Réciproquement, on multiplie de chaque côté de l'égalité par les inverses de b et d. □

Exemple : Les quotients $\dfrac{3}{3,5}$ et $\dfrac{2,4}{2,8}$ sont-ils égaux ? $\dfrac{4,5}{3,5}$ et $\dfrac{0,9}{0,6}$?
Le calcul de la démonstration permet également de calculer une quatrième proportionnelle :
Exemple : Calculer x dans chacun des cas suivants :

a) $\dfrac{x}{12} = \dfrac{9}{36}$ b) $\dfrac{x}{5} = \dfrac{21}{35}$ c) $\dfrac{9}{30} = \dfrac{2}{x}$

1.2 triangles semblables

Définition
Deux triangles sont dit *semblables* si leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Remarque. Il suffit que deux triangles aient deux angles égaux pour qu'ils soient semblables.
Exemple :

1. Tracer un triangle ABC tel que $AB = 5$ cm ; $\widehat{BAC} = 40°$ et $\widehat{ABC} = 60°$.
2. Tracer un triangle DEF tel que $DE = 7,5$ cm ; $\widehat{FDE} = 40°$ et $\widehat{DEF} = 60°$.
3. Que dire des longueurs des deux triangles ?

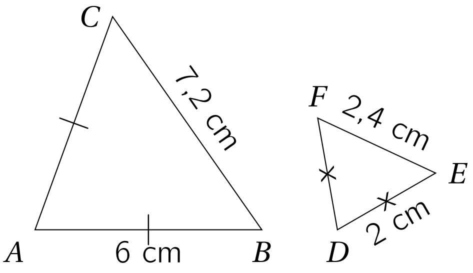
Propriété
Deux triangles semblables ont leurs côtés proportionnels.

Réciproquement, si deux triangles ont leurs côtés proportionnels, alors ils sont semblables.

Démonstration. (admis) □

Exemple :

a) Les triangles suivants sont-ils semblables ?



ABC	$AB=6$	$AC=6$	$CB=7{,}2$
DEF	$DE=2$	$DF=2$	$EF=2{,}4$

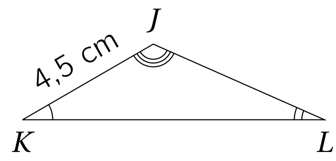
Calculons : $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}=3$ et $\dfrac{BC}{EF}=3$

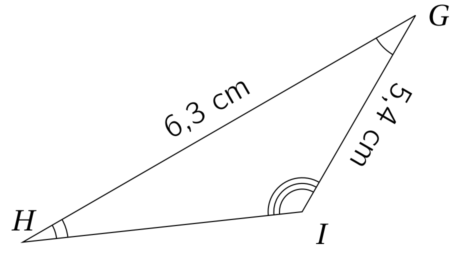
Les quotients sont égaux, donc le tableau précédent est un tableau de proportionnalité.

Or : si deux triangles ont leurs côtés de longueurs proportionnelles, alors ils sont semblables.

Donc : ABC et DEF sont semblables.

b) Calculer la longueur KL :





On sait que : $\hat{J}=\hat{I}$; $\hat{K}=\hat{G}$ et $\hat{L}=\hat{H}$

Or : deux triangles dont les angles sont deux à deux de même mesure sont semblables.

Donc : Les triangles JKL et IGH sont semblables.

Par ailleurs : si deux triangles sont semblables, alors leurs côtés homologues sont de longueurs proportionnelles.

Donc le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

JKL	$JK=4{,}5$	KL	JL
IGH	$IG=5{,}4$	$GH=6{,}3$	IH

$$\text{Ainsi : } KL=\frac{JK\times GH}{IG} =\frac{4{,}5\times 6{,}3}{5{,}4} =5{,}25$$

$[KL]$ mesure donc 5,25 cm.

2 Théorème : sens direct

2.1 Théorème

Exemple n° 1.

1. Tracer un triangle ABC, placer le point I milieu de $[AB]$ et J tel que $(IJ)\,/\!/\,(BC)$;
2. Que dire des triangles ABC et BIJ ?

3. Que dire de AJ et AC ? Calculer le coefficient d'grandissement.

Théorème *Thalès*
Si premièrement les points A, B, et M sont alignés, deuxièmement, les points A, C, et N sont alignés, et troisièmement si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, Alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

.

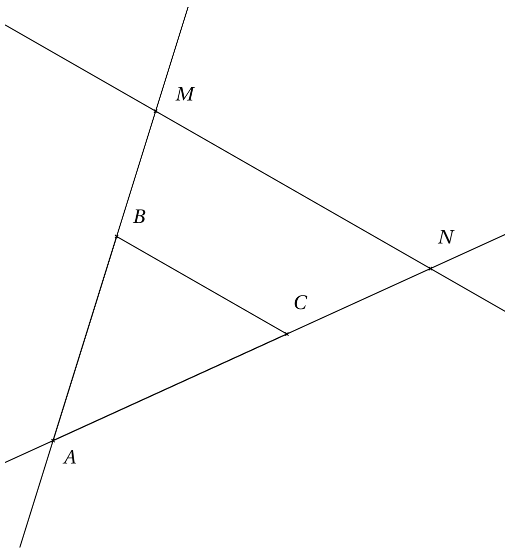
Démonstration. Ce théorème est admis, un preuve est proposée en dernière page. Si on admet les propriétés sur les triangles semblables, on peut démontrer aisément le théorème de Thalès. □

Remarque.

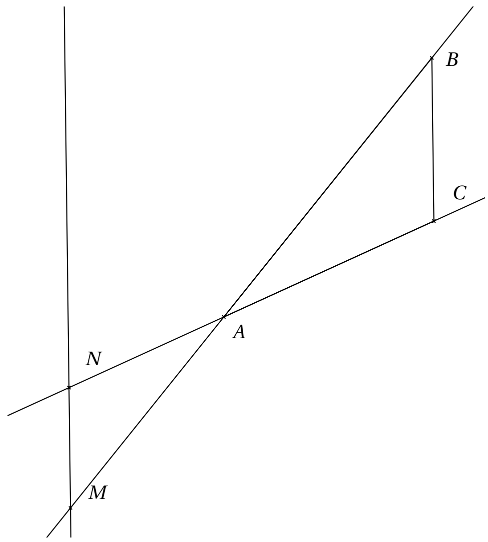
☞ Les droites (BM) et (CN) se coupent en A, elles sont dites *sécantes* en A ;

☞ il existe deux configuration de la situation :

a) Configuration classique :



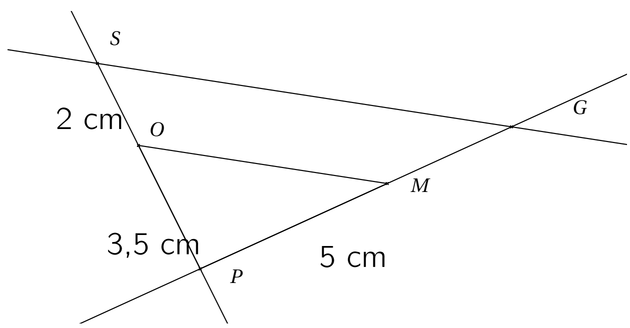
b) configuration "papillon" :



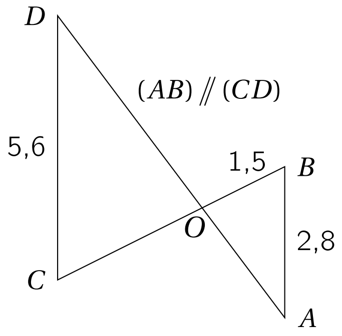
2.2 Applications

On peut utiliser le théorème de Thalès pour calculer des longueurs.
Exemple :

a) Calculer la longueur PG sachant que : $(SG) /\!/ (OM)$.

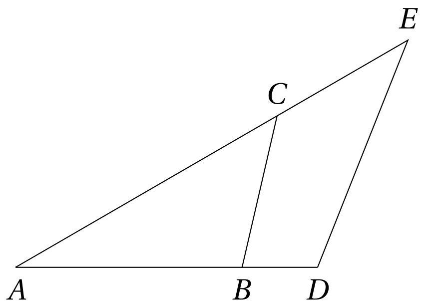


b) Calculer la longueur CO

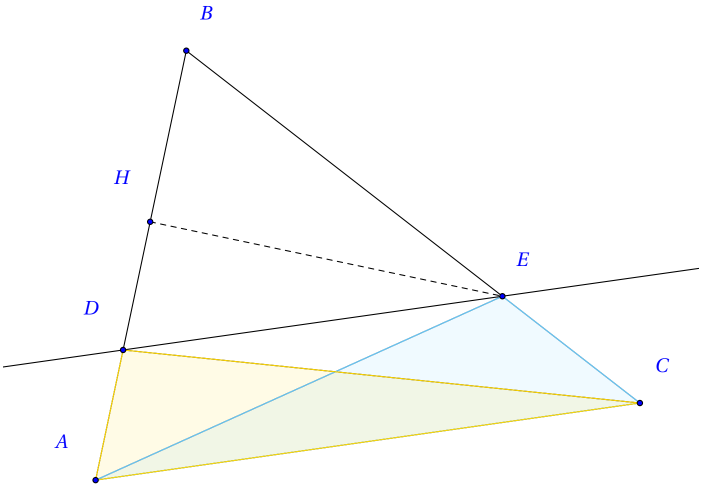


On peut utiliser ce théorème pour montrer que deux droites ne sont pas parallèles.

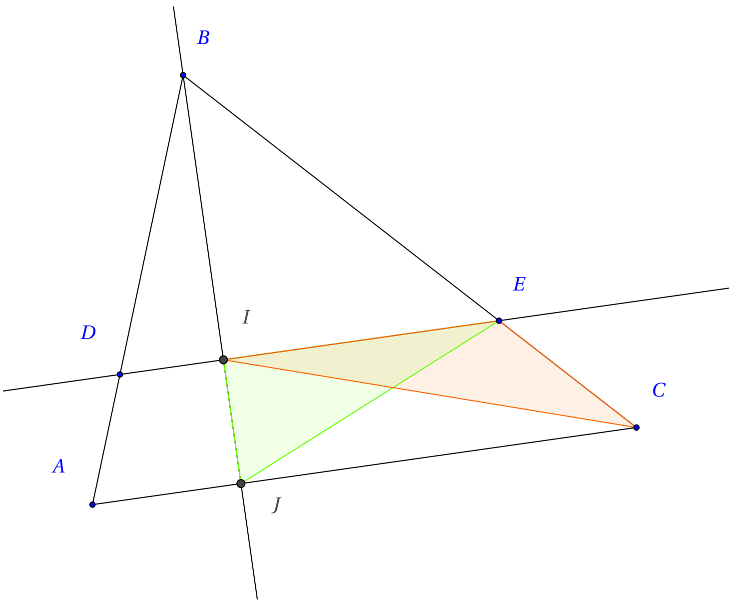
Exemple : On donne $AB = 6,3$; $AD = 11,2$; $AC = 9$ et $AE = 17$



Les droites (BD) et (DE) sont-elles parallèles ?



Les triangles AEC et ADC partagent un côté et la hauteur relative à ce côté, donc :
$\mathscr{A}_{AEC} = \mathscr{A}_{ADC}$.
Il vient que $\mathscr{A}_{AEB} = \mathscr{A}_{DCB}$.
Alors : $\dfrac{\mathscr{A}_{AEB}}{\mathscr{A}_{BDE}} = \dfrac{\mathscr{A}_{DCB}}{\mathscr{A}_{BDE}}$.
Or, en notant $h = HE$,
$\dfrac{\mathscr{A}_{AEB}}{\mathscr{A}_{BDE}} = \dfrac{AB \times h/2}{DB \times h/2} = \dfrac{AB}{DB}$
de même, $\dfrac{\mathscr{A}_{DCB}}{\mathscr{A}_{BDE}} = \dfrac{BC}{BE}$.
Ainsi, $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{BC}{BE}$.



La première égalité de Thalès que nous avons montrée donne : $\dfrac{BJ}{BI} = \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{BA}{BD}$.
Les triangles IEC et IEJ ont même aire, et donc $\mathscr{A}_{BJE} = \mathscr{A}_{BIC}$ (en ajoutant l'aire de BIE).
Or, $\mathscr{A}_{BJE} = \dfrac{BJ \times IE}{2}$, et $\mathscr{A}_{BIC} = \dfrac{BI \times JC}{2}$.
Ainsi, $BJ \times IE = BI \times JC$, donc, $\dfrac{BJ}{BI} = \dfrac{JC}{IE}$.
De même, $\dfrac{BJ}{BI} = \dfrac{AJ}{DI}$.
Enfin par linéarité, on obtient : $\dfrac{AJ + JC}{DI + IE} = \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{BA}{BD}$.
Cela conduit au résultat voulu : $\dfrac{AC}{DE} = \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{BA}{BD}$.