Chapitre 5 : Fractions

1 Quotient et fraction

1.1 Des nombre particuliers...

Exemple n° 1.

Définition
Soit a et b deux nombres, $b \neq 0$.
Le *quotient* de a par b est le nombre qui multiplié par b donne a.
On note ce quotient $\frac{a}{b}$, qu'on lit : "a divisé par b" ou "a sur b".

Attention : Danger, il est interdit de diviser par 0 ! ! !

Exemple n° 2.

Définition
Soit a et b deux nombres, $b \neq 0$, dans le nombre : $\frac{a}{b}$,

- a est appelé le *numérateur* ;
- b le *dénominateur*.

Lorsque le numérateur et le dénominateur sont des nombres *entiers*, on parle de *fraction*.

$$a \div b = \frac{a}{b}$$

Exemple : $\frac{2,1}{7}$ n'est pas une fraction, c'est l'écriture fractionnaire du quotient $2,1 \div 7$. Mais $\frac{5}{2}$ est une fraction.

Définition
Un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction est un nombre *rationnel*.

Exemple :

a) $\frac{5}{7}$ est un nombre rationnel ;

b) $\frac{6}{11}$ est un nombre rationnel ;

c) 3 est un nombre rationnel ($3 = \frac{3}{1}$)

d) $2,1$ est un nombre rationnel ($2,1 = \frac{21}{10}$)

e) $0,00134$ est un nombre rationnel ($0,00134 = \frac{134}{10000}$)

f) π n'est pas rationnel !

Exemple n° 3. $\dfrac{17}{5}$ est le nombre qui multiplié par 5 donne 17.
Calculons :

$$\begin{array}{rr|l} 1 & 7 & 5 \\ \cline{3-3} & 2\ 0 & 3.4 \\ & 0 & \end{array}$$

$$17 \div 5 = \underbrace{3,4}_{\text{écriture décimale}} = \underbrace{\frac{17}{5}}_{\text{écriture fractionnaire}} = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \underbrace{3 + \frac{2}{5}}_{\text{entier + fraction inférieure à 1}}$$

Exemple n° 4.
Remarque. Une fraction (ou nombre rationnel) peut avoir une écriture décimale exacte, mais ce n'est pas toujours le cas (en fait ça ne l'est que très rarement) :

- $\dfrac{1}{2} = 0,5$ (quotient décimal)
- $\dfrac{1}{3} \approx 0,3333$ (quotient non décimal)
- $\dfrac{28}{7} = 4$ (quotient décimal)
- $\dfrac{33}{14} \approx 4,714$ (quotient non décimal)

Exemple n° 5.
Intérêt des fractions :

1. On dispose d'une écriture exacte et élégante, ce qui n'est pas toujours le cas avec l'écriture décimale.
2. Les fractions sont agréables pour désigner des portions ou des proportions. Par exemple un quart de pizza, ou 50% des articles sont soldés.
3. Avec l'entraînement et l'habitude, il est beaucoup plus facile de calculer avec les fractions qu'avec des nombres décimaux. $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ alors que : $0,25 \times 0,25 = ??$
4. En pratique nous allons prendre l'habitude d'écrire les divisions sous forme fractionnaire : cela participera de la simplification des calculs.

1.2 Portion, proportion

Exemple n° 6.
Exemple n° 7.
On peut représenter une proportion à l'aide d'un schéma. On peut aussi calculer une proportion à l'aide d'une fraction, (éventuellement on peut exprimer le résultat sous forme de pourcentage – une fraction de dénominateur 100).
Exemple n° 8.

2 Egalité de fractions - simplification

2.1 Egalité de fraction

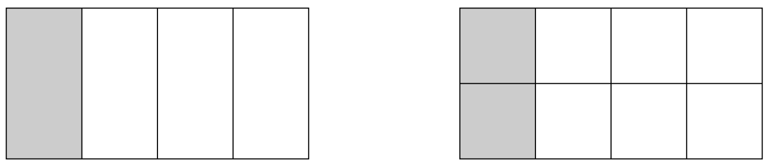
Exemple : Calculer $10 \div 2$ et $30 \div 6$. Que constate-on ?

On peut écrire $\dfrac{10}{2} = \dfrac{30}{6}$. Que s'est-il passé ?

Propriété
Un quotient ne change pas lorsqu'on multiplie ou divise numérateur et dénominateur par un même nombre <u>non nul</u>.
Si a, b et c sont des nombres, avec $c \neq 0$,

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

Géométriquement :



$$\frac{1}{4} \qquad = \qquad \frac{2}{8}$$

Remarque.

☞ Cette propriété permet de ramener tout quotient de nombres décimaux (ou fraction décimale) à une fraction : $\dfrac{0,54}{7} = \dfrac{0,54 \times 100}{7 \times 100} = \dfrac{54}{700}$

☞ Cela justifie aussi la méthode lorsqu'on pose une division à virgule : $\dfrac{54}{3,6} = \dfrac{540}{36} = 15$.

Exemple n° 9.
Remarque. Il y a une infinité de quotients égaux.

$$\frac{3}{6} = \frac{6}{12} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} = \ldots$$

Parmi tous ces quotients l'un possède le plus petit dénominateur, et le plus petit numérateur possible, c'est $\dfrac{1}{2}$. Cette fraction est dite irréductible.

2.2 Simplification de fractions

Définition
Simplifier une fraction c'est écrire une fraction qui lui est égale mais avec un numérateur et un dénominateur plus petits.
Lorsqu'on ne peut plus simplifier une fraction, elle est dite *irréductible*.

Exemple : $\dfrac{21}{14} = \dfrac{7 \times 3}{7 \times 2} = \dfrac{3}{2}$

Remarque. Simplifier une fraction, revient à chercher tous les diviseurs communs à son numérateur et à son dénominateur.

Méthode

Première méthode :

☞ On repère un diviseur commun au numérateur et au dénominateur ;

☞ On simplifie au fur et à mesure.

Deuxième méthode :

☞ On décompose le numérateur en produit de facteurs premiers ;

☞ On décompose le dénominateur en produit de facteurs premiers ;

☞ On simplifie.

Exemple n° 10.