# Chapitre 3 : Arithmétique

## 1 Diviseur, multiples

### 1.1 Division euclidienne

*Exemple* : On se propose de répartir 172 œufs dans des boîtes de 12 œufs. Pour résoudre ce problème on effectue une division que l'on appelle *division euclidienne*.

$$\begin{array}{rr|l} & 1\,7\,2 & 1\,2 \\ \cline{3-3} - & 1\,2\phantom{\,2} & 1\,4 \\ \cline{2-2} & 5\,2 & \\ - & 4\,8 & \\ \cline{2-2} & 4 & \end{array}$$

On peut donc remplir 14 boîtes et il restera 4 œufs. On dit que : 172 est le *dividende* ; 12 le *diviseur* ; 14 le *quotient* ; et 4 le *reste*.

**Définition**
Si $a$ et $b$ sont deux entiers, alors il existe un unique entier $q$ et un unique entier $r$ tels que :

$$a = b \times q + r$$

et : $0 \leq r < b$.

**Remarque.** Trouver $q$ et $r$, c'est effectuer la division euclidienne.

**Exemple n° 1.** Effectuer les divisions euclidiennes suivantes, puis écrire le résultat sous la forme $a = b \times q + r$.

a) $a = 1789 \quad b = 9$

$$\begin{array}{r|l} 1\,7\,8\,9 & 9 \\ \cline{2-2} 8\,8\phantom{\,9} & 1\,9\,8 \\ 7\,9 & \\ 7 & \end{array}$$

Donc : $1789 = 198 \times 9 + 7$

b) $a = 509 \quad b = 15$

c) $a = 1024 \quad b = 64$

d) $a = 105 \quad b = 21$

**Remarque.** On peut vérifier son résultat à l'aide de la calculatrice qui possède une touche spéciale "division euclidienne".

## 1.2 Diviseur, multiple

**Définition**
Si $a$ et $b \neq 0$ sont deux nombres, on dit que $b$ est un *diviseur* de $a$ si le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$ est nul. C'est à dire s'il existe un entier $q$ tel que :

$$a = b \times q$$

On dit aussi que $a$ est *multiple* de $b$.

**Exemple n° 2.**

a) $74 = 58 \times 1 + 16$ donc 74 n'est pas divisible par 58.

b) $56 = 4 \times 14 + 0$ donc 56 est divisible par 4.

**Remarque.**

- 1 divise tout entier naturel ;
- Tout entier se divise lui même ;
- 0 ne divise aucun entier non nul ;
- 0 est multiple de tout entier.

On rappelle les règles de divisibilité :

**Règle**

☞ Un nombre est divisible par 2 si son chiffre des unités est pair ;

☞ Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;

☞ Un nombre est divisible par 4 si ses deux derniers chiffres forment un nombre divisible par 4 ;

☞ Un nombre est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;

☞ Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9 ;

☞ Un nombre est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.

## 1.3 Application : trouver tous les diviseurs d'un nombre

Pour déterminer les diviseurs d'un nombre $a$, on teste les entier successifs jusqu'à obtenir une inversion d'ordre des facteurs.

**Exemple n° 3.**

$$\begin{aligned} 44 &= 1 \times 44 \\ &= 2 \times 22 \\ &= 4 \times 11 \\ &= 11 \times 4 \end{aligned}$$

Les diviseurs de 44 sont donc : 1 ; 2 ; 4 ; 11 ; 22 et 44.

$$\begin{aligned}84 &= 1 \times 84\\ &= 2 \times 42\\ &= 3 \times 28\\ &= 4 \times 21\\ &= 6 \times 14\\ &= 7 \times 12\\ &= 12 \times 7\end{aligned}$$

Les diviseurs de 84 sont donc : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 12 ; 14 ; 21 ; 28 ; 42 et 84.

**Exemple n° 4.**

# 2 Nombres premiers

## 2.1 Définition

**Définition**
Un entier est appelé un *nombre premier* s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui même.

*Exemple* : 1 n'est pas premier, 2 est premier, 5 est premier, 15 n'est pas premier.

**Remarque.** Il faut connaître les nombres premiers jusqu'à 31.

## 2.2 Décomposition en produit de facteurs premiers

**Théorème**
Tout nombre entier se décompose de façon unique comme un produit de *facteurs premiers*.

*Démonstration.* (admis) □

Pour décomposer un nombre en facteurs premiers on peut grâce à ce théorème décomposer ses diviseurs successifs d'un nombre pour trouver sa décomposition en facteurs premiers.

**Exemple n° 5.** On cherche à décomposer 44 en produit de facteurs premiers.

**Méthode 1 :**

☞ On trouve un diviseur de 44 et on décompose 44 (on l'écrit comme un produit) :

$$44 = 2 \times 22$$

☞ On peut faire la même chose avec 22 qui n'est pas un nombre premier :

$$44 = 2 \times 2 \times 11$$

Décomposition de 315 :

**Méthode 2 :**

☞ On divise 44 puis les quotients par les nombres premiers jusqu'à épuisement comme suit :

$$\begin{array}{r|l} 44 & 2\\ 22 & 2\\ 11 & 11\\ 1 & \end{array}$$

On adoptera en pratique la disposition suivante :

$$315 = 3 \times 105$$
$$105 = 3 \times 35$$
$$35 = 5 \times 7$$
$$7 = 7 \times 1$$

Finalement : $315 = 3 \times 3 \times 5 \times 7$

$$\begin{array}{r|l} 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Décomposer en facteurs premiers :

a) 360 b) 216 c) 276

**Exemple n° 6.**

Les diviseurs d'un nombres apparaissent comme des produits de certains de ses facteurs premiers (par unicité de cette décomposition).

$$140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$$

| Nombre de facteurs premiers | diviseurs |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 ; 5 ; 7 |
| 2 | $2 \times 2 = 4$ ; $2 \times 5 = 10$ ; $2 \times 7 = 15$ ; $5 \times 7 = 35$ |
| 3 | $2 \times 2 \times 5 = 20$ ; $2 \times 2 \times 7 = 28$ ; $2 \times 5 \times 7 = 70$ |
| 4 | $2 \times 2 \times 5 \times 7 = 140$ |

Les diviseurs de 140 sont donc 1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 4 ; 10 ; 15 ; 35 ; 20 ; 28 ; 70 et 140.

**Exemple n° 7.**

**Exemple n° 8.**