1 Analyse : suites

1.1 Rappels

Exercice n° 1. Pour les suites suivantes, calculez u_0, u_1, u_2, u_{10} :

1. $u_n = 2n^2 - 1$ pour tout n entier naturel

2. $u_n = \dfrac{n+1}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$

3. $u_n = (-2)^n$ pour tout entier naturel n

Exercice n° 2. Pour les suites suivantes, calculez les termes de u_1 à u_4.

a) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n+1} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = (u_n+1)^2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n+1} \end{cases}$

Exercice n° 3. Pour les suites suivantes, calculez les 4 premiers termes de la suite puis *conjecturer* une formule explicite du terme général. Retrouvez u_0 à partir de votre formule, et démontrez la relation entre u_{n+1} et u_n.

a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$

Exercice n° 4. Pour les suites suivantes, étudiez leur sens de variation.

a) $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$

b) $u_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$

c) $u_n = (n-5)^2$ pour $n \geq 5$

d) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - n$

suite arithmétique

Une suite (u_n) de premier terme u_0 est arithmétique si il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.

Une suite (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

Somme de termes consécutifs : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$

$$S = \frac{(\text{nombre de termes})(1^{\text{er}}\text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

suite géométrique

Une suite (u_n) de premier terme u_0 est géométrique si il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = qu_n$.

Une suite est géométrique de premier terme u_0 et de raison q, si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n$.

Somme de termes consécutifs : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

1.2 Récurrence

raisonnement par récurrence

Montrer une propriété $P(n)$ par récurrence se rédige en trois temps :

- ☞ Initialisation (on vérifie que $P(n_0)$ est vraie) ;
- ☞ Récurrence (pour tout n entier supérieur ou égal à n_0, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ l'est aussi) ;
- ☞ Conclusion ($\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0, P(n)$ est vraie).

Exercice n° 5.

a) Montrer par récurrence que pour tout entier n non nul, la somme $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$, s'écrit aussi $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

b) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 6$. Montrer par récurrence que pour tout entier n, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice n° 6. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5} \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : 2,5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$.

Exercice n° 7. Soit (v_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{v_n}{v_n + 1} \end{cases}$$

1. Calculez les premiers termes de la suite et conjecturez une forme explicite pour v_n.

2. Démontrer la conjecture précédente.

Exercice n° 8.

1. Dresser un tableau de signe de $2x^2 - (x+1)^2$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 4, 2^n \geq n^2$.

Exercice n° 9. Montrer la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

Exercice n° 10. Montrer l'inégalité de Bernoulli : $(1+a)^n \geq 1 + na$. (où a est un réel positif et n un entier).

1.3 Limites

limite

☞ (u_n) diverge vers $+\infty$ ssi pour tout $A > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
pour tout $n \geq n_0, u_n > A$.

☞ (u_n) diverge vers $-\infty$ ssi pour tout $A < 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
pour tout $n \geq n_0, u_n < A$.

☞ (u_n) converge vers l ssi pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
pour tout $n \geq n_0, |u_n - l| < \varepsilon$.

Exercice n° 11.

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n + 2$. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 4 - \dfrac{1}{n}$. Montrer que (v_n) converge vers 4.

Exercice n° 12. Déterminer les limites des suites suivantes par opérations.

a) $u_n = \dfrac{1}{n^2} - 10$ **b)** $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \times \dfrac{1}{n}$ **c)** $w_n = \dfrac{3}{1 + \dfrac{1}{n}}$

formes indéterminées

☞ $0 \times (\pm\infty)$ ☞ $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

☞ $(+\infty) + (-\infty)$ ☞ $\dfrac{0}{0}$

Astuce : Penser à factoriser par le terme de plus haut degré.

Exercice n° 13. Etudier la convergence des suites suivantes.

a) $u_n = n^2 - n$ **b)** $v_n = \dfrac{4n^2}{n+1}$ **c)** $w_n = -n^3 + n^2 - 1$

comparaison

☞ Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'il existe un entier n_0, tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait : $u_n \geq v_n$:

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

☞ Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites et l un réel tel que à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$.

Exercice n° 14. Etudiez la limite des suites suivantes :

a) $u_n = 3n - \cos(n)$

b) $v_n = -n^2 - 3n + (-1)^n$

c) $w_n = 4 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

d) $y_n = -5 + \dfrac{\sin(n)}{n}$

suites géométriques, suites monotonnes

☞ Si q est un réel :

- $q \leq -1$ la suite (q^n) n'a pas de limite ;
- $-1 < q < 1$ la suite (q^n) converge vers 0 ;
- $q = 1$ la suite est constante ;
- $q > 1$ la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.

☞ Une suite croissante et majorée converge.

☞ Une suite décroissante et minorée converge.

Exercice n° 15. Déterminer les limites des suites suivantes :

a) (u_n) telle que : $u_0 = -5$ et de raison 2.

b) $v_n = -3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

c) $w_n = \dfrac{4}{3^n}$.

d) $z_n = 5 + e^{-n}$

e) $y_n = 2^n - 0,5^n$

Exercice n° 16. On donne la suite $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ telle que $u_n = \dfrac{n-1}{n+4}$.

1. Montrer que (u_n) est majorée par 1.

2. Montrer que (u_n) est croissante, et conclure.

Exercice n° 17. On donne la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = \dfrac{2n-2}{n+4}$.

1. Montrer que (u_n) est majorée par 2.

2. Montrer que (u_n) est croissante, et conclure.

Exercice n° 18. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n par : $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{n}$.

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Calculez les premiers termes de la suite (u_n) et conjecturer de l'expression de la suite en fonction de n.

4. Démontrer votre conjecture.

Exercice n° 19. Le 1er janvier 2020, on compte 200 poissons dans un aquarium. Chaque année il meure 15% des poissons et on en ajoute 45 nouveaux en fin d'année. On note u_n le nombre de poissons dans l'aquarium au 1er janvier de la nème année après 2020.

1. Déterminer u_1, interpréter.

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,85u_n + 45$.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq 300$. En déduire que (u_n) converge.

4. Calculez la limite de (u_n).

5. Etudier la suite (v_n) définie pout tout entier n par : $v_n = u_n - 300$, et interpréter le résultat.

Exercice n° 20. Un urbaniste étudie l'évolution d'une population d'un quartier afin d'adapter les équipements de celui-ci (école, transports...). En 2020 la population est estimée à 12 000 personnes. Différentes contraintes limitent la population à 60 000 habitants.

Partie A. L'urbaniste commence par supposer une évolution de 5% par an. On note (v_n) la suite qui modélise le nombre d'individus la $n^{\text{ème}}$ année après 2020.

1. Déterminer v_0 et v_1.
2. Déterminer la nature de la suite (v_n).
3. Donner l'expression de v_n en fonction de n.
4. Ce modèle rend-il compte des contraintes ? Sinon proposer un programme permettant de donner l'année à partir duquel ce modèle n'est plus valable.

Partie B. L'urbaniste utilise un second modèle donné par la suite (u_n) telle que : $u_0 = 12$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x$.
  a) Justifier que g est croissante sur $[0; 60]$.
  b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

2. On remarque que $u_{n+1} = g(u_n)$.
  a) Calculez la valeur arrondie à 10^{-3} près de u_1, interprétez le résultat.
  b) Montrer que $0 \leq u_n \leq 55$, pour tout entier n.
  c) En déduire la convergence de la suite (u_n).
  d) On admet que la limite l de la suite vérifie que $g(l) = l$, en déduire la valeur de l et interpréter.

3. L'urbaniste souhaite savoir quelle année la population dépassera les 50 000 habitants. Proposer un algorithme qui permette de déterminer ce seuil.

2 Géométrie dans l'espace

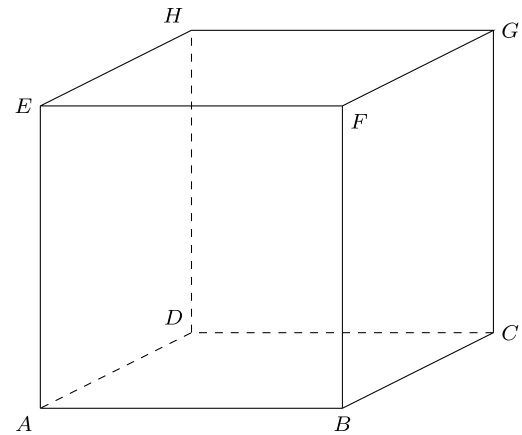
2.1 Plan et sections

Exercice n° 21.

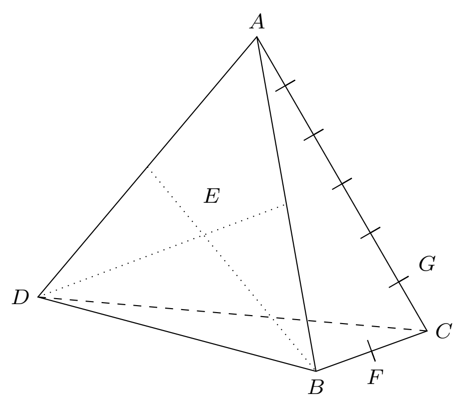
Le cube $ABCDEFGH$ a pour une arrête de 8 cm. M, N, et P sont des points respectivement de $[GH]$, $[EF]$ et $[AB]$, tels que : $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{PB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$.

1. Placer les points M, N et P. Puis construire Q et R, intersections du plan (MNP) avec les arrêtes $[BC]$ et $[CG]$.

2. Vérifier que la section du cube par le plan (MNP) est un pentagone.

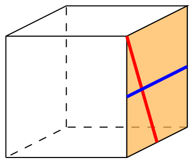
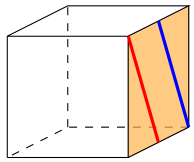
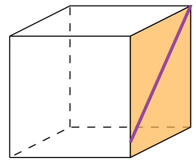
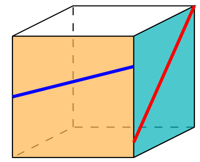


Exercice n° 22. Déterminer la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (EFG). E est le centre de gravité du triangle ADB ; $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$.

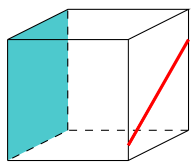
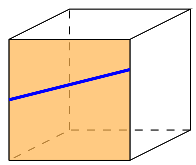
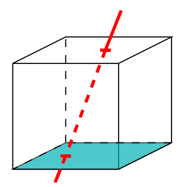


2.2 Relations droites et plans

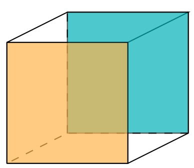
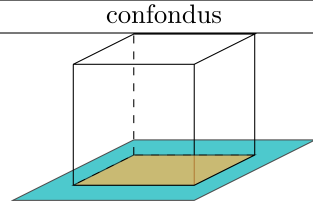
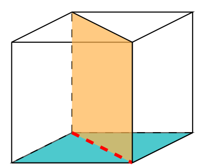
droites

d et d' sont coplanaires.			d et d' sont non coplanaires
Sécantes	parallèles	confondues	
			

droite et plan

d est parallèle à $\mathcal{P}$	d est incluse dans $\mathcal{P}$	d est sécante à $\mathcal{P}$
		

plans

parallèles	confondus	sécants
		

Exercice n° 23. Dans le cube $ABCDEFGH$ donner les positions relatives de :

a) (AB) et (CD)

b) (AD) et (EF)

c) (ABC) et (EFH)

d) (BCF) et (ADG)

e) (CFH) et (AB)

f) (AF) et (CH)

Propriété

☞ *Théorème du toit* : Si deux plans contiennent deux droites parallèles, alors leur intersection est une droite parallèle à ces deux droites.

☞ Une droite est parallèle à un plan ssi elle est parallèle à une droite de ce plan.

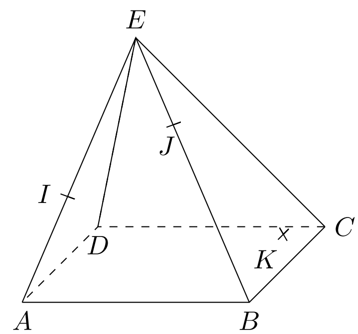
☞ Deux plans sont parallèles ssi deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux sécantes de l'autre.

Exercice n° 24. $ABCD$ est un tétraèdre, I et J sont les milieux respectifs de $[BD]$ et $[CD]$. H est un point de $[AD]$ distinct du milieu de $[AB]$. Les droites (HI) et (HJ) coupent les droites (AB) et (AC) en M et N.

1. Montrer que (IJ) est parallèle à (ABC).

2. Montrer que : $(IJ) /\!/ (MN)$.

Exercice n° 25. $ABCDE$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est un rectangle, K est un point de (BCE). Construire l'intersection des plans (EBC) et (EAD), puis construire la section de la pyramide par le plan (IJK).



2.3 Vecteurs

la base

Trois vecteurs de l'espace $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ constituent une base de l'espace si chacun de ces vecteurs n'est pas une combinaison linéaire des deux autres.

Relation de Chasles : si A, B, et C sont trois points de l'espace : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

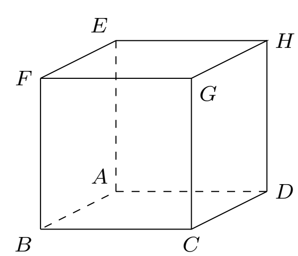
Exercice n° 26.

Dans le cube $ABCDEFGH$:

1. Donner une caractérisation du plan (EGC) à l'aide d'un point et de deux vecteurs.

2. Montrer que A appartient au plan (EGC).

3. Donner une caractérisation du plan (BEG) et montrer que le point P centre de la face $ABFE$ appartient à ce plan.



Exercice n° 27. On considère trois points de l'espace A, B et C non alignés, et deux points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. En déduire que C, M et N sont alignés.

Exercice n° 28. Dans le tétraèdre $ABCD$ les points I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$. Exprimez le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Exercice n° 29. A l'aide d'un schéma du cube $ABCDEFGH$ exprimez le vecteurs $\overrightarrow{CF}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CG}; \overrightarrow{BD})$.

Exercice n° 30. Dans le tétraèdre $ABCD$ les points E et F sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$. Les points M et N sont définis par : $\overrightarrow{CM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DE}$.

1. Déterminer la nature des quadrilatères $MCEF$ et $ADEN$.

2. Montrer que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DN} - 2\overrightarrow{DF}$

3. Qu'en conclure pour les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{DF}$?

Exercice n° 31. $ABCDEFGH$ est un parallélépipède et K est un point de l'espace tel que : $\overrightarrow{BK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BE}$

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AK}$;

2. Exprimez $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, et $\overrightarrow{AE}$, puis conclure quand à l'alignement des points A, K et G.

Exercice n° 32. Dans le tétraèdre $ABCD$, I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, et $[CD]$.

1. Montrer que : $\overrightarrow{IJ} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2. Justifier que : $\overrightarrow{KL} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

3. En déduire que $\overrightarrow{IJ}$; $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires.

4. E est le point tel que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Montrer que $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires.

coordonnées

☞ Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

☞ Equation paramétriques d'une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$: $\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$

(k est un réel).

Exercice n° 33. Dans le cube $ABCDEFGH$ montrer par le calcul que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BH}; \overrightarrow{CG})$ constitue une base de l'espace.

Exercice n° 34. Soient $A(-3; 2; 8)$ et $B(4; 5; -2)$

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2. Calculer les coordonnées du point C de la droite (AB) ayant pour abscisse -11

Exercice n° 35. Déterminer les équations paramétriques de la droite (AB) où $A(0; 1; 2)$ et $B(-2, 3, 1)$.

Exercice n° 36. Soit un cube $ABCDEFGH$, le point P est le symétrique de D par rapport au point C. Montrer que P appartient au plan (BEG) par :

a) Par calcul vectoriel ;

b) Par calcul de coordonnées ;

c) En utilisant des positions relatives.

Exercice n° 37. On donne les représentations paramétriques suivantes – k et t sont des réels :

$$d : \begin{cases} x = 9 + k \\ y = -1 + 2k \\ z = 3k \end{cases} \qquad d' : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

1. Vérifier que les droites d et d' ne sont pas parallèles.

2. Déterminer leur point d'intersection s'il existe, sinon conclure.

Exercice n° 38. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points $A(0; -1; 5)$, $B(2; -1; 5)$, $C(11; 0; 1)$ et $D(11; 4; 4)$. Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à 1 cm par seconde. Un point N se déplace sur (CD) de C vers D à la même vitesse. On note M_t et N_t les positions de M et N au bout de t secondes.

1. Montrer que les coordonnées des points M_t et N_t en fonction du temps sont :
$M_t(t; -1; 5)$ et $N_t(11; 0,8t; 1 + 0,6t)$.

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par C dirigé par les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

a) Montrer que la droite (CD) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

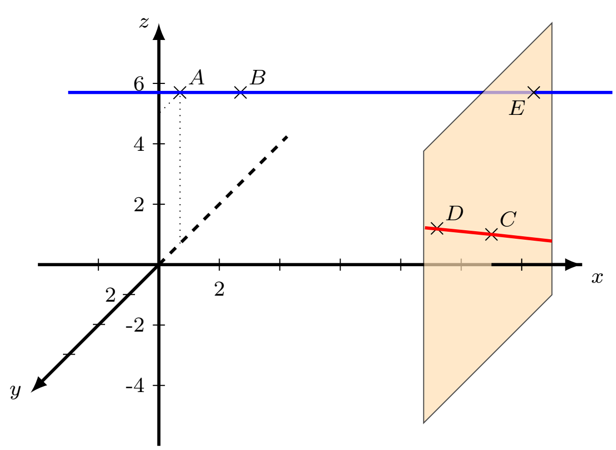
b) Soit $E(11; -1; 5)$ déterminer deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{CE} = a\vec{j} + b\vec{k}$.

c) Vérifier que la droite (AB) coupe $\mathcal{P}$ en E.

d) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

3. **a)** Montrer que : $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$

b) A quel instant la longueur M_tN_t est-elle minimale ?



Exercice n° 39. On considère un cube d'arrêt de longueur 1 cm. On note I le milieu du segment $[EF]$, J le milieu du segment $[EH]$, K le point tel que $\overrightarrow{EK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EA}$ et L tel que $\overrightarrow{AL} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

1. **a)** En considérant la base $(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{EH})$ du plan (EFH), justifier que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont colinéaires.

b) Justifier que $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{LH}$ sont colinéaires.

c) Pourquoi les plans (FLH) et (IJK) sont-ils parallèles ?

2. Dans cette question on se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

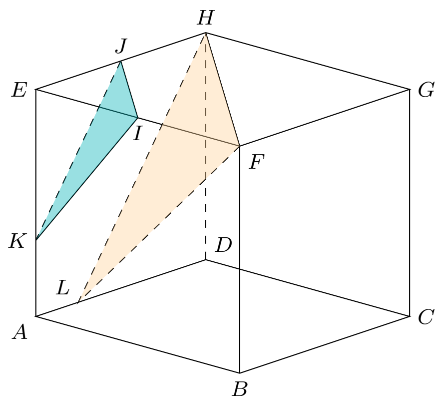
a) Donner sans justifier les coordonnées de B, C, E, F, et G dans ce repère.

b) On note Δ la droite passant par le point E et de vecteur directeur $\vec{u}(4; 4; -3)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

c) Les points du plan (ABC) ont une coordonnée nulle, laquelle ?

d) En déduire les coordonnées du point M, intersection de Δ et du plan (ABC).

e) Les droites Δ et (BF) sont-elles parallèles, sécante ou non coplanaires ? Justifier.



2.4 Produit scalaire

Définition

Soient $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs de l'espace :

☞ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$ *(s'interprète comme un projeté orthogonal)* ;

☞ $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$;

☞ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$.

Exercice n° 40.

1. Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2. Vérifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux, et donner une valeur arrondie au centième de degré près de l'angle $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$.

3. Dans un cube $ABCDEFGH$ calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG}$

Exercice n° 41.

1. Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$, et l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 60°$. Déterminer la longueur AC.

2. On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner une valeur approchée au centième de l'angle formé par ces vecteurs.

Exercice n° 42. Dans le cube $ABCDEFGH$ les points I et J sont les milieux respectifs des faces $HEFG$ et $CBFG$. Déterminer l'angle $\widehat{DJI}$ arrondi au dixième de degrés près.

Plan

Etant donné un point $A(x_A; y_A; z_A)$, et un vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Propriété *distance*
Dans un repère *orthonormé*, la distance AB est donnée par la formule :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Exercice n° 43.

1. Déterminer l'équation du plan passant par $A(-2;3;1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

2. Déterminer la distance entre le point $C(1;2;-1)$ et le plan d'équation cartésienne : $2x - 3y + z - 1 = 0$.

3. Déterminer la distance entre le point $B(-1;2;1)$ et la droite d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 2+3k \\ y = -1+k \\ z = -2k \end{cases}$

Exercice n° 44. On considère le tétraèdre de sommets : $I(2;-2;-4)$; $J(2;-2;0)$; $K(2;2;-4)$ et $L(6;-2;-4)$. Montrer que ce tétraèdre est trirectangle en I, puis calculer son volume.

Exercice n° 45. On donne le plan d'équation cartésienne : $x+y-2z=0$ et la droite d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = 2+2k \\ y = 1-k \\ z = k \end{cases}$

1. Justifier que la droite et le plan sont sécants.

2. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice n° 46. Dans un tétraèdre régulier, montrer que les arrêtes opposés sont deux à deux orthogonaux.

Exercice n° 47. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A(1;-1;3)$; $B(0;3;1)$; $C(2;1;3)$; $D(6;-7;-1)$ et $E(4;-6;2)$.

1. Montrer que A, B et C définissent un plan ;

2. Déterminer une équation cartésienne de ce plan ;

3. Montrer que la droite (DE) est orthogonale à ce plan ;

4. Déterminer une représentation paramétrique de cette droite et calculer les coordonnées du point F, intersection de (DE) et (ABC).

Exercice n° 48. On considère les points $A(3;0;0)$; $B(0;6;0)$; $C(0;0;4)$ et $D(-5;0;1)$.

1. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) ;

2. Déterminer une équation cartésienne de ce plan ;

3. Déterminer des équations paramétriques de la droite (d) orthogonale au plan (ABC) passant par D ;

4. En déduire les coordonnées du point H, intersection de (d) et de ce plan ;

5. Calculer la distance de D au plan (ABC).

3 Analyse : fonctions

3.1 Composée

dérivée

Si u et v sont deux fonctions telles que : f est dérivable sur J et g est dérivable sur I à valeurs dans J, alors $f \circ g$ est dérivable sur I et :

$$(f \circ g)' = g'(f' \circ g)$$

Autrement dit : pour tout $x \in I$: $f(g(x))' = g'(x)f'(g(x))$

Exercice n° 49. Dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = \cos(x^2) + 3x$

b) $g(x) = (-x+1)e^{3x}$

c) $h(x) = \sin(-x^2 - 1)$

d) $k(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$

Exercice n° 50. Etudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{x}$

3.2 Continuité

Exercice n° 51. Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x-4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice n° 52. Soit a un réel, et f une fonction dérivable en a, montrer que f est continue en a.

point fixe

Soit f une fonction *continue* d'un intervalle I dans lui-même, et (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$.
Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$, alors : $f(l) = l$.

Exercice n° 53. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, $u_0 = 6$, et pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$. En admettant que la suite (u_n) set décroissante et minorée, déterminer sa limite.

Exercice n° 54. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1 + 3u_n}{3 + u_n}$.

1. Ecrire une fonction u(n) en python qui renvoie la valeur de u_n, puis conjecturer avec un tableau de valeur la convergence de (u_n).

2. On admet que l'on peut montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1.

a) Déterminer la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, puis montrer que f est continue sur $[1; 5]$.

b) Montrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Théorème *des valeurs intermédiaires.*
Soit f une fonction *continue* sur l'intervalle $[a; b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c dans l'intervalle $[a; b]$.

Exercice n° 55. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ sur $[-2; +\infty[$.

1. Dresser un tableau de variation de f ;

2. **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[-2;+\infty[$;

   b) Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans $[-2;+\infty[$. Donner un encadrement au dixième de α.

Exercice n° 56. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{10x}{e^x+1}$

1. Démontrer que pour tout x, réel positif, $f'(x) = \dfrac{10}{(e^x+1)^2} \times g(x)$ où g est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.

2. **a)** Démontrer qu'il existe un unique réel positif α tel que $g(\alpha) = 0$.

   b) A l'aide d'un tableau de valeur sur une calculatrice déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

   c) Déterminer le signe de g suivant les valeurs de x.

3. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^+$.

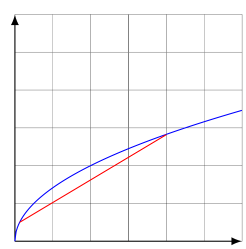
3.3 Convexité

géométrie

☞ La courbe représentative d'une fonction *convexe* sur un intervalle I se situe *en dessous* de ses cordes ;

$\forall (x;y) \in I^2, \forall t \in [0,1]$:
$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$

☞ La courbe représentative d'une fonction *concave* sur un intervalle I se situe *au dessus* de ses cordes.



$\forall (x;y) \in I^2, \forall t \in [0,1]$,
$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$

Exercice n° 57. Montrer que si a et b sont strictement positifs, alors :

1. $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$

2. $\sqrt{a+b} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

dérivées

Une fonction dérivable est *convexe* sur un intervalle I si et seulement si sa *dérivée est croissante* sur I.

Une fonction deux fois dérivable est convexe sur un intervalle I si et seulement si sa *dérivée seconde* est *positive* sur I .

Exercice n° 58. Etudier la convexité de la fonction f à l'aide du tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$	$\searrow$	

Exercice n° 59. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + 1$. Etudier la convexité de la fonction f.

Exercice n° 60. Etudier la convexité de la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{-x}$

Exercice n° 61. On donne la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x^2 - 8x + 17)e^x$. Déterminer les coordonnées du ou des points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction h.

Exercice n° 62. Soit f la fonction définie par $f(x) = xe^{x^2-1}$.

1. **a)** Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2-1}$
   b) En déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.
2. **a)** Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = 2x(2x^2 + 3)e^{x^2-1}$
   b) Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
3. Soit h la fonction définie par : $h(x) = x - f(x)$. On admet que l'inéquation $1 - e^{x^2-1} \geq 0$ a pour ensemble de solution l'intervalle $[-1; 1]$.

   Déterminer le signe de h sur $[-1; 1]$ et en déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite d d'équation $y = x$ sur $[-1; 1]$.

   Que peut-on en déduire sur la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?

3.4 Fonctions trigonométriques

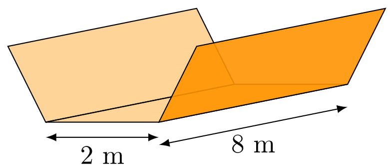
Exercice n° 63. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\cos(2x) - 1$

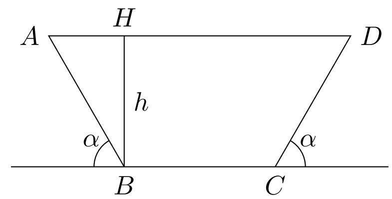
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
2. Déterminer la plus petite période T de f.
3. Montrer qu'il est possible de restreindre l'étude de f sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
4. Construire un tableau de variation de f sur $[-\pi; \pi]$.

Exercice n° 64. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin^3(x) - 3\sin(x)$.

1. **a)** Montrer que f est périodique.
   b) Etudier la parité de f.
   c) Montrer que $f(\frac{\pi}{2} - x) = f(\frac{\pi}{2} + x)$. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = -3\cos(x)\cos(2x)$
3. Dresser un tableau de variation de f sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Exercice n° 65. Une citerne d'eau doit être fabriquée à partir d'une bande d'étain de 8 m de long et de 6 m de large et cela en pliant, de chaque côté, une bande de 2 m de large en faisant un angle α avec l'horizontale.





Le but de l'exercice est de trouver l'angle α qui maximise l'aire de la section, donc le volume de la cuve.

La section est assimilée à un trapèze isocèle $ABCD$ tel que $AB = BC = CD = 2$ m et (AD) est parallèle à (BC).

H est le projeté orthogonal de B sur (AD).

1. Expliquer pourquoi $\widehat{BAH} = \alpha$.

2. Montrer que $h = 2\sin(\alpha)$ et qe $AD = 2 + 4\cos(\alpha)$.

3. Montrer que l'aire du trapèze $ABCD$ est $S(\alpha) = 4\sin(\alpha) + 4\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.

4. On considère la fonction f définie sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ par $f(\alpha) = 4\sin(\alpha) + 4\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.

- **a)** Montrer que la dérivée de f est définie par $f'(x) = 4(2\cos^2(x) + \cos(x) - 1)$.
- **b)** Factoriser le polynôme $P(x) = 2x^2 + x - 1$, puis montrer que $f'(x) = 8(\cos(x) + 1)(\cos(x) - 0,5)$.
- **c)** Trouver la valeur de l'angle α qui satisfasse le problème.

3.5 Fonction logarithme néperien

fondamentaux

La fonction logarithme népérien, notée ln, est définie sur $]0; +\infty[$ et à tout nombre réel strictement positif x associe l'unique solution y de l'équation $e^y = x$.

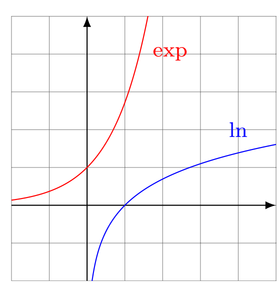
- ☞ $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : e^{\ln x} = x$
- ☞ $\ln 1 = 0$
- ☞ $\forall x \in \mathbb{R} : \ln e^x = x$
- ☞ $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(e^{-1}) = -1$

Remarque. La bonne définition de cette fonction est une application du théorème des valeurs intermédiaires.

courbe

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$0 < a < b \iff \ln a < \ln b$$



Exercice n° 66. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $\ln x = 5$ **b)** $e^x = 3$ **c)** $\ln(1 - x) \geq -1$ **d)** $e^{2x-3} > 4$

propriétés

Si a et b sont deux réels strictement positifs :

☞ $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

☞ $\ln(a^n) = n \ln a$

☞ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

☞ $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

☞ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Exercice n° 67. Exprimer en fonction de $\ln 5$:

a) $\ln 25 + \ln \sqrt{125}$ **b)** $\ln 35 - \ln 175$ **c)** $\ln \frac{e^4}{25}$ **d)** $e^{-\ln 5} - \ln(5e)$

Exercice n° 68. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme 1. Déterminer la limite de la suite (u_n), puis calculer le premier entier n_0 pour lequel $u_{n_0} < 10^{-5}$

dérivée, limites

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$, et pout tout réel strictement positif :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* : \lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0$$

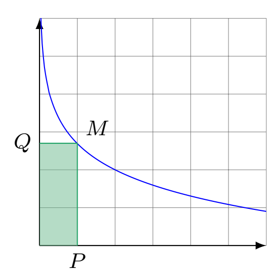
Exercice n° 69.

1. Etudier la fonction $f(x) = x\ln x - x$.
2. Donner l'équation de sa tagente au point d'abscisse e.

Exercice n° 70. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - 3x^2$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^3}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-1)\ln(x-1)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}$

Exercice n° 71.
Soit f la fonction définie sur $]0;14[$ par : $f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$. La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est représentée ci-contre.
A tout point M de la courbe, on associe ses projetés orthogonaux P et Q respectivement sur l'axe des abscisses, et celui des ordonnées.



1. Montrer que : $g : x \longmapsto 2x - \ln \frac{x}{2}$ modélise l'aire du rectangle $OPMQ$.
2. Dresser un tableau de variation de g sur $]0;14[$, et en déduire les coordonnées de M qui maximisent l'aire du rectangle.

3.6 Primitives

définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle *primitive* de la fonction f sur I toute fonction solution de l'équation différentielle $y' = f$.

F est une primitive de f sur I :

$$\forall x \in I : F'(x) = f(x)$$

Théorème
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

Exercice n° 72.

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto \cos x$ est solution de l'équation différentielle : $y'' + y' = 0$

2. Montrer que la fonction $f(x) = e^{-2x}$ est solution de l'équation différentielle :$y' = -2y$

fonction	primitive
$f(x) = a$	$F(x) = ax + k$
$f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N}, n > 1)$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N}, n > 1)$	$F(x) = \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + k$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k$

Exercice n° 73. Donner une primitive des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **b)** $g(x) = x^5$ **c)** $h(x) = -\dfrac{5}{4x^3}$

Exercice n° 74.

1. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction $f : x \longmapsto 3x^2 + \dfrac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

2. En déduire la primitive de f qui vaut e en 0.

Exercice n° 75. Résoudre l'équation différentielle : $2y' = 8y - 10$. En déduire la solution qui s'annule en 1.

4 Dénombrement et probabilités

4.1 Dénombrement

Bien compter...

☞ Nombre de permutations d'un ensemble à n éléments : $n!$

☞ Nombre d'arrangements de k éléments pris dans un ensemble à n éléments (k-liste ordonnée) :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

☞ Nombre de combinaisons de k éléments pris dans un ensemble à n éléments (k-ensemble non ordonné) :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exercice n° 76. Dans un QCM on trouve 15 questions, pour chacune 4 réponses sont proposées. Une seule réponse est autorisée par question. Combien y a-t-il de réponses possibles à ce QCM ?

Exercice n° 77. Au tiercé les parieurs doivent pronostiquer les trois chevaux qui arrivent en tête à la fin d'une course de dix chevaux.

1. Combien de combinaisons de trois chevaux existe-t-il si on tient compte de l'ordre d'arrivée ?

2. Combien y en a-t-il si on ne tient pas compte de l'ordre d'arrivée ?

Exercice n° 78. On cherche à constituer des groupes de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes.

1. Combien y a-t-il de façons de constituer ces groupes ?

2. Combien y en a-t-il ne comptant que des hommes ?

3. Combien y en a-t-il ne comptant que des personnes de même sexe ?

4. Combien y en a-t-il comprenant au moins une femme et au moins un homme ?

Exercice n° 79. Soit n un entier naturel dont la décomposition en produit de facteurs premiers est :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$$

1. Décomposer 18 et 25 en produit de facteurs premiers. Combien de diviseurs positifs ont chacun de ces deux nombres ?

2. Dans le cas général, combien de diviseurs positifs possède un entier n ?

3. Donner le nombre de diviseurs positifs de 120.

4. Quel est le plus petit entier naturel ayant exactement 35 diviseurs positifs et dont la décomposition en produit de facteurs premier fasse intervenir au moins deux facteurs premiers distincts.

4.2 Probabilités

Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0;1[$. On appelle épreuve ou expérience de Bernoulli de paramètre p une expérience aléatoire à deux issues l'une de probabilité p (succès) l'autre de probabilité $1-p$ (échec).

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

- ☞ Espérance : $E(X) = p$
- ☞ Variance : $V(X) = p(1-p)$
- ☞ Ecart-type : $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$

Exercice n° 80. Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 1. Une urne contient quatre boules rouges et n boules noires indiscernables au toucher. On prélève successivement et au hasard quatre boules de l'urne en remettant dans l'urne la boule tirée après chaque tirage.

1. Justifier que cette succession de tirages est un schéma de Bernoulli et le représenter par un arbre.

2. Démontrer que la probabilité q_n que l'une au moins des quatre boules tirées soit noire est telle que :

$$q_n = 1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4$$

3. Quel est le plus petit entier n tel que $q_n \geqslant 0,9999$?

Loi binomiale

Soit X une variable aléatoire réelle. $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

$$\forall k \in [\![0;n]\!], P(X=k) = \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k}$$

- ☞ Espérance : $E(X) = np$
- ☞ Variance : $V(X) = np(1-p)$
- ☞ Ecart-type : $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Exercice n° 81. On considère une urne contenant 9 boules orange et une verte. On tire 20 boules avec remise et on considère la variable aléatoire V qui à cette expérience associe le nombre de boules vertes obtenues.

1. Donner la loi de V

2. Calculer $P(V=2)$

Exercice n° 82. Un grossiste en appareils électroniques assure que seulement 2 % des appareils qu'il vend ont des défauts. Pour tester son affirmation, la responsable d'une grande surface tire au sort 1500 appareils parmi ceux livrés par ce grossiste, ce tirage étant assimilable à un tirage avec remise. On appelle D la variable aléatoire donnant le nombre d'appareils avec défaut.

1. Dans l'hypothèse où l'affirmation du grossiste est correcte, la responsable de la grande surface peut-elle être sûre, au seuil de 90 %, d'avoir moins de 45 appareils avec défaut ?

2. Donner un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95% associé à D dans l'hypothèse où l'affirmation du grossiste est correcte.

3. Il y a 40 appareils avec défaut parmi les 1500. Cela remet-il en cause l'affirmation du grossiste ?