



1 Calcul littéral

1.1 Nombres réels

Exercice n° 1. Effectuer les calculs suivants en donnant le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$$\text{a) } \frac{85}{4} + \frac{25}{-5}$$

$$\text{c) } \frac{42}{75} - \left(-\frac{22}{30}\right)$$

$$\text{b) } \frac{-1}{25} - 8$$

$$\text{d) } -\frac{14}{27} + \frac{-5}{108}$$

Exercice n° 2. Anne-Cécile rend visite à ses amis, ceux-ci, attentionnés lui offrent à chaque fois une part son gâteau préféré. Le premier jour, elle mange un demi gâteau chez Sophie. Le lendemain, Marie lui en donne un quart. Le troisième jours, elle prend seulement un huitième de gâteau chez Jacques. Enfin, avec Franck, elle ne mange qu'un seizième de gâteau et le cinquième jour, elle ne prend qu'un trente-deuxième de gâteau chez Elsa pour lui faire plaisir.

1. Quelle proportion de gâteau a-t-elle mangée en cinq jours ?
2. En continuant ainsi parviendra-t-elle à manger un gâteau entier ?

Exercice n° 3. Calculer les expressions suivantes :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{5} \times \frac{-4}{3} + \frac{7}{2}$$

$$\mathbf{C} = -\frac{3}{8} - \frac{5}{8} \times \frac{7}{9}$$

$$\mathbf{B} = \frac{13}{7} + \left(-\frac{8}{7}\right) \div \left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$\mathbf{D} = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{5}\right) \left(\frac{5}{4} - \frac{4}{3}\right)$$

Exercice n° 4. Calculer puis simplifier au maximum.

$$\mathbf{A} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}}$$

$$\mathbf{B} = 2 + \frac{\frac{2}{7}}{\frac{5}{14}}$$

$$\mathbf{C} = \frac{3 - \frac{7}{5}}{1 - \frac{9}{10}}$$

Exercice n° 5. Le train Paris-Marseille part de la gare de Marseille avec 800 passagers. Un quart d'entre eux voyagent en 1^{ère} classe et le reste en 2^{de} classe.

Les trois huitième des passagers de la 1^{ère} classe et le sixième des passagers de la 2^{de} classe descendent à Lyon.

1. Au départ de Marseille, quel est le nombre de passagers en 1^{ère} classe ? En 2^{de} classe ?
2. En déduire le nombre de personnes de chaque catégorie qui descendent à Lyon.
3. Exprimer à l'aide d'une fraction simplifiée la proportion des passagers de 1^{ère} classe puis de ceux de 2nd classe descendant à Lyon par rapport au total des voyageurs.

1.2 Distributivité

Exercice n° 6. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$\mathbf{A} = (5 + \sqrt{15})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$$

$$\mathbf{E} = -2(3x - 4)(-5 + 7x)$$

$$\mathbf{B} = 7(-3x + 12)$$

$$\mathbf{F} = (-2x + 4)^2$$

$$\mathbf{C} = (2x + 5)(x - 2) + 4(2, 5 - 10x)$$

$$\mathbf{G} = (-10 - 3x)^2$$

$$\mathbf{D} = (-x + 5)(-6x + 1) - 3x(2x - 10)$$

$$\mathbf{H} = (x - 7)^2$$

Exercice n° 7. Voici un programme de calcul : montrer qu'il conduit au calcul $5x^2$.

- Choisir un nombre x ;
- multiplier par 5 ;
- ajouter 2 ;
- multiplier par le nombre de départ ;
- ôter le double du nombre de départ.

Exercice n° 8. Factoriser les expressions suivantes :

$$\mathbf{A} = 28x - 21$$

$$\mathbf{D} = 20 - 5x^2$$

$$\mathbf{B} = -x(x + 3) - 5(x + 3)$$

$$\mathbf{E} = 36x^2 - 12x + 1$$

$$\mathbf{C} = y^2 + 10y + 25$$

$$\mathbf{F} = (3x - 4)^2 - (8 - 2x)^2$$

Exercice n° 9. Ecrire sous la forme d'un unique quotient :

$$\mathbf{a)} \quad \frac{x}{7} + \frac{x}{3}$$

$$\mathbf{c)} \quad 3x - \frac{2x - 1}{3x} \text{ avec } x \neq 0$$

$$\mathbf{b)} \quad \frac{4}{x} + \frac{2x + 1}{3} \text{ avec } x \neq 0$$

Exercice n° 10. $ABCD$ est un rectangle d'aire constante égale à 1. La longueur AB est notée x , avec $x > 0$.

a) Justifier que $BC = \frac{1}{x}$.

b) Montrer que le périmètre du rectangle est donné par la formule :

$$p(x) = \frac{2x^2 + 2}{x}$$

c) Justifier que si $x = 10^4$, alors le périmètre est environ égal à 2×10^4 avec une erreur inférieure au millièmes.

1.3 Equations

Produit nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul.

Résoudre dans \mathbb{R} :

a) $2x^2 = 9$

c) $-x^2 + 4x = 3$

b) $4(x - 3)(5x + 2) - (x^2 - 9) = 0$

d) $x^2 + 3x = -2x - 6$

Exercice n° 11. Résoudre les équations suivantes :

a) $(x - 1)^2 - (2 - 3x)^2 = 0$

d) $5(2x - 3) = 9 - 4x^2$

b) $18x^2 + 12x + 2 = 0$

e) $9 = 4(2x + 3)^2$

c) $2x(x + 3) + x + 3 = 0$

f) $9 + 4(x - 2)^2 = 0$

Exercice n° 12. La distance x (en mètres) parcourue par un caillou en chute libre à partir du temps $t = 0$, lorsqu'on le lâche sans vitesse initiale dans un puits, est donnée par la formule : $x = 4,9t^2$.

1. Quelle est la distance parcourue si le temps de chute est 2s ? 4s ?
2. En combien de temps le caillou atteint-il le fond d'un puits de 20 m de profondeur ?

1.4 Inéquations

Exercice n° 13. Factoriser puis résoudre les inéquations suivantes :

a) $(x + 1)(3x - 2) \geq (4x + 4)(2x - 2)$

c) $(1 - 2x)^2 - (2 - x)^2 \geq 0$

b) $1 - 4x^2 \geq 0$

d) $(3x - 1)^2 > 4 - 4x + x^2$

Exercice n° 14. Déterminer l'ensemble de définition puis résoudre les inéquations suivantes :

a) $\frac{x - 4}{2x + 1} \geq 0$

c) $\frac{2x - 5}{2x + 1} \leq \frac{x - 2}{x - 3}$

b) $\frac{x + 1}{1 - x} \geq 1$

d) $\frac{x - 3}{4x^2 - 1} > 0$

Exercice n° 15. Soit $A(x) = x^2 - 6x - 3$

1. Ecrire A sous forme canonique.
2. Factoriser A .
3. Utilisez la forme de A la plus adaptée pour :

- a) Résoudre l'équation $A(x) = 0$;
- b) Résoudre l'inéquation $A(x) > 0$;
- c) Calculer $A(0)$ et $A(3)$.

Exercice n° 16. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par : $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ et g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -x - 5$. Déterminez les positions relatives des courbes représentatives de f et g .

2 Second degré

racines de $ax^2 + bx + c$

On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$ le trinôme possède 2 racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$ le trinôme possède une racine double : $x_0 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ le trinôme ne possède pas de racine.

Remarque. Si x_1 et x_2 sont les racines d'un trinôme $ax^2 + bx + c$, on peut noter :

$$S = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad P = x_1 x_2$$

Alors : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - Sx + P)$

Exercice n° 17. Résoudre les équations suivantes :

a) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$

c) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

b) $50 - 2(2 - 3x)^2 = 0$

d) $4x^4 - 3x^2 + 12 = 0$

Exercice n° 18. (Avec les données de l'exercice n° 12).

1. En combien de temps, à partir de l'instant de départ, l'observateur qui laisse tomber le caillou entend-t-il le son de l'impact du caillou au fond du puits? (vitesse du son : $340\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
2. On souhaite connaître la profondeur d'un puits. A l'aide d'un smartphone on chronomètre le temps écoulé entre le lâché du caillou et le retour de son d'impact, on trouve 3,10 s. Quelle est la profondeur du puits?

Exercice n° 19. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases}$$

signe de $ax^2 + bx + c$

Le trinôme est du **signe de a à l'extérieur** des racines.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a		signe opposé de a	signe de a

Remarque. Si $\Delta \leq 0$ le trinôme est toujours du signe de a (éventuellement s'annule en x_0).

Exercice n° 20. Résoudre les inéquations suivantes :

a) $(-6x^2 - x + 2) \geq 0$

c) $(x + 10)(-3x^2 + 5x - 4) > 0$

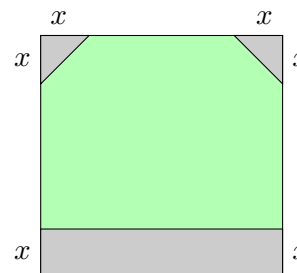
b) $(2 - x)(x^2 + 3x - 4) < 0$

Exercice n° 21. Dans un repère on considère les fonctions polynômes d'expressions : $f_1(x) = -x^2 + 3x + 2$ et $f_2(x) = 3x^2 - 3x + 1$.

1. Représentez sur la calculatrice les courbes de ces fonctions et conjecturez leur position relative.
2. Confirmez ou infirmez votre conjecture par une étude de signe.

Exercice n° 22.

Un maître verrier taille une vitre dans un carré de 3 m de côté. Il y découpe un rectangle de largeur x et deux triangles rectangles isocèles comme représenté ci-contre. La vitre ainsi obtenue doit avoir une surface supérieure ou égale à 5 m². Comment doit-il choisir les dimensions de sa découpe ?



variations de $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Si $a > 0$ la courbe est décroissante puis croissante :

minimum en $x = \frac{-b}{2a}$.

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\frac{-b}{2a})$	$+\infty$

- Si $a < 0$ la courbe est croissante puis décroissante :

maximum en $x = \frac{-b}{2a}$.

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\frac{-b}{2a})$	$-\infty$

Exercice n° 23. Un constructeur automobile produit des voitures à bas coût. Chaque voiture doit être vendue 6 000 €. La production q peut varier entre 0 et 100 000 voitures. Une étude montre que le coût de production suit la formule suivante : $C(q) = 0,05q^2 + q + 80$ (q est exprimé en millier et $C(q)$ en millier d'euros).

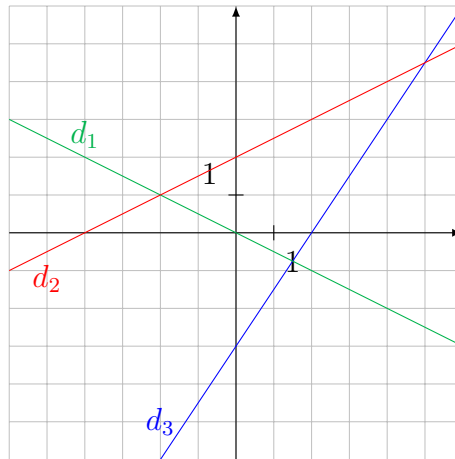
On appelle coût fixe le prix supporté par l'entreprise même si la production est nulle.

1. Quel est le coût fixe de cette entreprise ?
2. Déterminez la quantité à partir de laquelle le coût de production est supérieur à 200 000 €.
3. A combien s'élève la recette pour une telle production ?
4. Exprimez, en fonction de q , la recette notée $R(q)$, en millier d'euros.
5. En déduire la fonction polynôme qui donne les bénéfices réalisés par l'entreprise.
6. Dans quel intervalle doit se situer la quantité de voitures produites pour réaliser un bénéfice ?
7. Quel est le nombre d'automobiles à produire pour obtenir un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice ?

3 Dérivation

3.1 Fonction dérivée

Exercice n° 24. Lire la pente de chacune des droites représentées.



Exercice n° 25.

1. Calculer le taux de variation de la fonction cube entre 0 et 1 puis entre 1 et 3.
2. Calculer le taux de variation de la fonction inverse entre 0,1 et 1 puis entre 1 et 10.

Exercice n° 26. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 5x^2 - 7x$

1. Soit h un réel non nul. Montrer que le taux de variation de la fonction g entre 1 et $1 + h$ est égal à $3 + 5h$. En déduire $g'(1)$.
2. Reprendre la même démarche pour calculer $g'(-1)$
3. Déduire des deux questions précédentes les équations des tangentes \mathcal{T} et \mathcal{T}' à la courbe représentative de g aux points d'abscisses 1 et -1 .

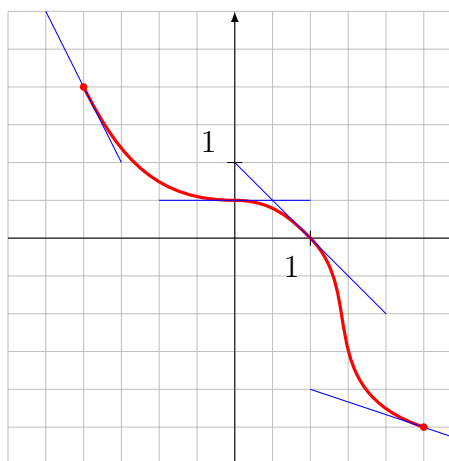
Exercice n° 27.

A l'aide de la représentation graphique ci-contre donner les valeurs de :

$$f(-2); f(0); f(1); f\left(\frac{5}{2}\right).$$

Donner également les valeurs de :

$$f'(-2); f'(0); f'(1); f'\left(\frac{5}{2}\right).$$



dérivées usuelles

Fonction	Dérivée
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$

Fonction	Dérivée
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

Remarque. Dériver n'a de sens que sur un *intervalle*.

Exercice n° 28. Pour les fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition, puis calculer leur dérivée en précisant les valeurs pour lesquelles cette dérivée existe.

a) $f(x) = 3x + 7$

b) $g(x) = x^2 - x$

c) $h(x) = -2x^3 + 5x^2 - x + 5$

d) $k(x) = \sqrt{x} - \frac{4}{x}$

e) $l(x) = \frac{-2x^6 + 4x^2 - 1}{4}$

f) $p(x) = x - \sin x$

Exercice n° 29.

règles de dérivation

Opération	Dérivée
Somme	$(u + v)' = u' + v'$
Produit scalaire	$(\lambda u)' = \lambda u'$
Produit	$(uv)' = u'v + v'u$
Inverse	$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$
Quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Opération	Dérivée
Puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Racine	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
Exponentielle	$(e^u)' = u'e^u$

Exercice n° 30. Pour les fonctions suivantes calculez leur dérivée en précisant les valeurs pour lesquelles le calcul est valable.

a) $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

h) $f(x) = \frac{2}{5x} - \frac{3x}{4}$

b) $f(x) = x \sin x$

f) $f(x) = \frac{2 - x^2}{2 + x^2}$

i) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

c) $f(x) = \sqrt{x} \cos x$

g) $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$

j) $f(x) = \frac{x^2 + 8}{2\sqrt{x} - 5}$

d) $f(x) = -\frac{4}{x^3}$

Exercice n° 31. Même consigne.

a) $f(x) = \sqrt{1 - 4x}$

b) $f(x) = \frac{1}{(2 + x)^2}$

c) $f(x) = (-2x + 7)^3$

3.2 Variations

Exercice n° 32. Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$ et $g(x) = \frac{-5}{x + 1}$

1. Déterminez les dérivées des fonctions f et g . Que remarque-t-on ?

2. Calculez $f(x) - g(x)$. Pouvait-on ainsi prévoir la remarque de la question 1 ?

variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $f' = 0$ sur I , alors f est constante sur I ;
- si $f' > 0$ sur I , alors f est croissante sur I ;
- si $f' < 0$ sur I , alors f est décroissante sur I .

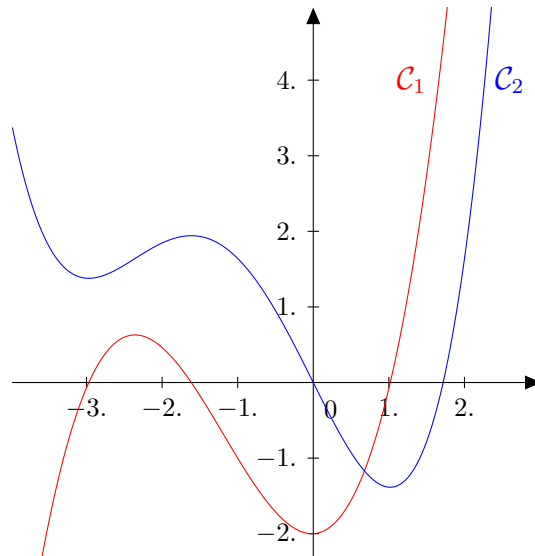
Exercice n° 33. Déterminer le sens de variation de chacune de ces fonctions. Précisez les valeurs de x pour lesquelles les calculs sont valables.

a) $f(x) = \frac{-1}{x+1}$

b) $f(x) = -2\sqrt{x} - 5$

c) $f(x) = \sqrt{2x^4 + 5}$

Exercice n° 34. Voici deux courbes représentatives de fonction. L'une représente la fonction f , l'autre la fonction g . Sachant que $g = f'$, associer chaque courbe à sa fonction.



Exercice n° 35. On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x + 4$

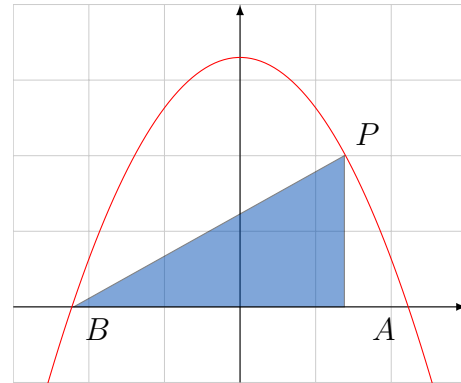
1. On remarque que -2 est solution de l'équation $f(x) = 0$. Sachant cela, factorisez le polynôme et trouvez les racines de f .
2. Dressez un tableau de variation de la fonction f .
3. En déduire le signe de f .

Exercice n° 36.

La parabole d'équation $y = \frac{-2}{9}x^2 + 8$ coupe l'axe des abscisses en A et B .

Le point $P(x; y)$ se déplace sur la parabole entre A et B .

Déterminez les coordonnées du point P pour que l'aire du triangle rectangle coloré soit maximale.



Exercice n° 37. Un audit financier fournit, à une entreprise, un modèle de coût de fabrication ; pour $q \in [0; 500]$ objets produits le coût en euro est donné par :

$$C(q) = q^2 - 10q + 1500$$

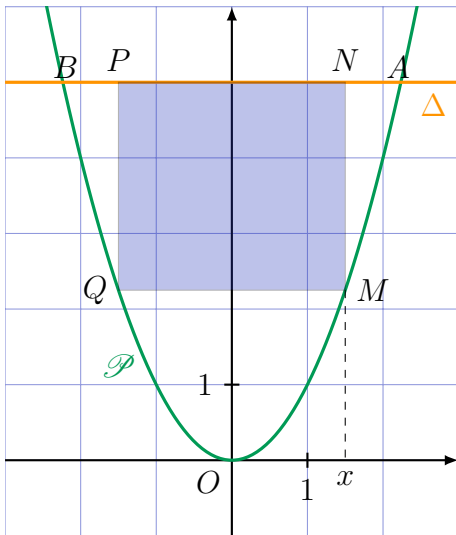
L'entreprise vend chaque objet 300€.

1. Quels sont les coûts fixes ? Déterminez q pour que les coûts soient égaux à 3 500€.
2. Exprimez la fonction recette totale R en fonction de q .
3. Calculez la quantité d'objets à produire et à vendre pour que cette entreprise réalise un bénéfice maximal.
4. Donner ce bénéfice en euro.
5. Pour quelle quantité d'objets fabriqués et vendus, le bénéfice est-il strictement positif ?

Exercice n° 38. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{(2+x)^3}{2x^2}$.

1. Etudier les variations de f .
2. Combien f a-t-elle d'extrémums locaux ?
3. Justifier que l'axe des abscisses est tangent à la courbe \mathcal{C}_f en -2 .
4. Déterminer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.
5. Déterminer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse -1 .

Exercice n° 39. Dans la portion du plan, muni d'un repère orthonormé, déterminée par l'arc de la parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2$ et la droite Δ d'équation $y = 5$, on veut inscrire, comme sur la figure ci-dessous, un rectangle dont l'aire est la plus grande possible.



1. Soit x l'abscisse du point M de la parabole situé sur l'arc \widehat{OA} . Montrer que l'aire du rectangle $MNPQ$ est égale à : $-2x^3 + 10x$.
2. Soit f la fonction qui à x associe l'aire du rectangle $MNPQ$.
 - a) Quel est son ensemble de définition ?
 - b) Etudier les variations de f sur cet ensemble.
3. Donner la valeur exacte des coordonnées du point M qui correspond à l'aire maximale du rectangle, ainsi que la valeur de cette aire.

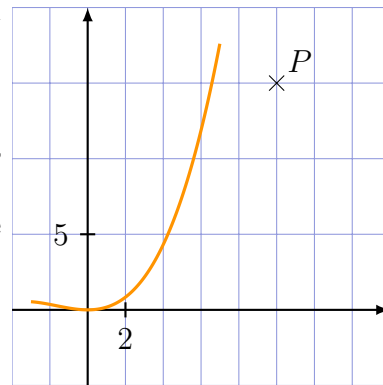
Exercice n° 40.

Une portion de piste pour moto cross est modélisée dans un repère orthogonal par la fonction f définie sur $[-3; 6]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{100}x^3 + \frac{3}{20}x^2.$$

Un jeune conducteur, téméraire et imprudent, est sorti de la piste et a continué sur sa lancée en suivant une trajectoire rectiligne définie par la tangente à la courbe de f au point de sortie.

Sachant qu'il a heurté un poteau situé au point $P(10; 15)$, déterminer une valeur approchée au centième des coordonnées du point où il a quitté la piste.



4 Suites

Exercice n° 41. Pour les suites suivantes, calculez u_0, u_1, u_2, u_{10} :

1. $u_n = 2n^2 - 1$ pour tout n entier naturel
2. $u_n = \frac{n+1}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$
3. $u_n = (-2)^n$ pour tout entier naturel n

Exercice n° 42. Pour les suites suivantes, calculez les termes de u_1 à u_4 .

a)
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$$

Exercice n° 43. Pour les suites suivantes, calculez les 4 premiers termes de la suite puis *conjecturer* une formule explicite du terme général. Retrouvez u_0 à partir de votre formule, et retrouvez la relation entre u_{n+1} et u_n .

$$\text{a) } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \frac{1}{1 + u_n} \end{cases}$$

Exercice n° 44. Pour les suites suivantes, étudiez leur sens de variation.

$$\text{a) } u_n = \frac{3n - 2}{n + 1} \quad \text{c) } u_n = (n - 5)^2 \text{ pour } n \geq 5$$

$$\text{b) } u_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad \text{d) } u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - n$$

Exercice n° 45. Déterminer les variations des suites suivantes :

$$\text{a) } u_n = n^2 - n \quad \text{b) } v_n = \frac{2^n}{5^{n+1}} \quad \text{c) } w_n = -3^n$$

suite arithmétique

Une suite (u_n) de premier terme u_0 est arithmétique si il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$.

Une suite (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r , si et seulement si pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$.

Somme de termes consécutifs : $u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n + 1)(u_0 + u_n)}{2}$

$$S = \frac{(\text{nombre de termes})(1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Exercice n° 46. Un groupe d'enfant souhaite construire la plus haute tour possible. Initialement la tour mesure 40 cm. Chaque enfant ajoute un étage de 2cm. On note u_n la hauteur de la tour en cm après le passage de n enfants.

1. Déterminer la valeur de u_1 ;
2. Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n , en déduire la nature de la suite (u_n) ;
3. Exprimer u_n en fonction de n ;
4. Quelle est la hauteur de la tour après le passage de 24 enfants ?
5. Combien de passage d'enfant faut-il pour que la tour dépasse 1,5 m ?

Exercice n° 47. Soline a une grande collection de matriochka, parmi ces poupées russes, la plus petite mesure 1 cm. Chaque poupée se trouve dans une poupée qui mesure 0,5 cm de plus qu'elle. On note u_n la taille de la $n^{\text{ème}}$ poupée dans l'ordre croissant.

1. Exprimer (u_n) en fonction de n
2. Quelle est la taille de la poupée 10^n ?
3. Si au lieu d'emboîter les poupées, on les empilait, quelle serait la hauteur d'une pile formée de 10 poupées ?

suite géométrique

Une suite (u_n) de premier terme u_0 est géométrique si il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = qu_n$.

Une suite est géométrique de premier terme u_0 et de raison q , si et seulement si pour tout entier naturel n , $u_n = u_0q^n$.

Somme de termes consécutifs : $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Exercice n° 48. Les suites suivantes sont-elles géométriques ?

a) $u_n = n^2 + 1$

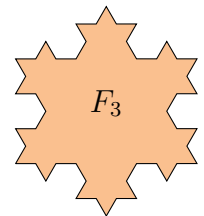
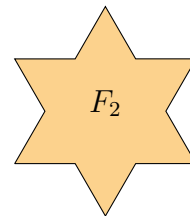
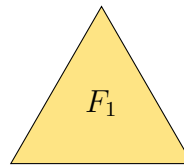
b) $v_n = 2^{n+1}$

c) $w_n = \frac{1}{n}$

Exercice n° 49. Une ville compte 10 000 habitants en 2020, chaque année ce nombre d'habitant augmente de 10%. Exprimer cette situation à l'aide d'une suite et donnez en la nature.

Exercice n° 50. On construit le flocon de la façon suivante :

- Partir d'un triangle équilatéral (flocon F_1);
- sur chaque côté remplacer le tiers central par un triangle équilatéral sans base (flocon F_2);
- répéter l'opération.



En supposant que le côté de F_1 a pour longueur 6 cm, exprimer à l'aide d'une suite le périmètre des flocons.

Exercice n° 51. Perrine place 8000€ sur un compte dont le taux d'intérêt cumulé est de 3,8%. Chaque année, 76€ de frais de gestion sont prélevés.

Pour tout entier n , on note C_n le capitale de l'année n . On suppose que l'année 0 est l'année du premier dépôt.

1. On cherche le capital dont disposera Perrine dans 10 ans.
 - a) Etablir une relation de récurrence pour définir la suite (C_n) .
 - b) Soit (D_n) la suite définie pour tout entier n par : $D_n = C_n - 2000$. Quelles est la nature de la suite (D_n) ?

c) En déduire une expression de C_n en fonction de n , et répondre au problème posé.

2. Combien d'années seront nécessaires pour que le capital augmente de 50% ?

Exercice n° 52. Mathieu a prévenu ses élèves en début d'année :

- s'il y a une interrogation à une séance, la probabilité qu'il y en ait une à la suivante est 0,7 ;
- s'il n'y a pas eu d'interrogation à une séance, la probabilité qu'il n'y en ait pas à la suivante est 0,05.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n , l'événement « il y a une interrogation à la n -ième séance ». et on note $p_n = P(I_n)$.

Pour la première séance, Matthieu a annoncé qu'il n'y aurait pas d'interrogation donc $p_0 = 0$.

1. Construire un arbre faisant apparaître I_n, I_{n+1} et représentant la situation.

2. Montrer que : $p_{n+1} = -0,25p_n + 0,95$

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = p_n - 0,76$

- a) Montrer que (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
- b) En déduire u_n puis p_n en fonction de n .

4. Quelle est la probabilité qu'il y ait une interrogation lors de la 120^e et dernière séance de l'année ?

5 fonctions trigonométriques

Exercice n° 53. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos(x) + x^2$.

1. Montrer que f est paire.

2. Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?

Exercice n° 54. Montrer que les fonctions suivantes sont périodiques.

a) $f : x \mapsto \sin^2(2x)$

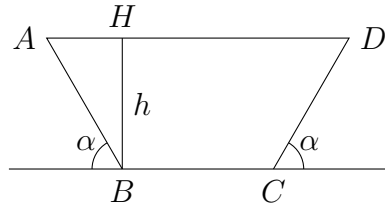
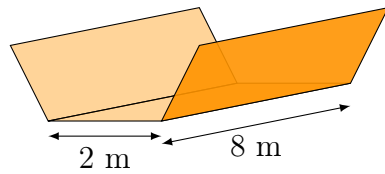
b) $g : x \mapsto 4 \sin(x) \times \sin\left(\frac{x}{3}\right)$

Exercice n° 55.

1. Etudier la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos^2(x)$

2. Etudier la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \sin(x) + \cos(x)$

Exercice n° 56. Une citerne d'eau doit être fabriquée à partir d'une bande d'étain de 8 m de long et de 6 m de large et cela en pliant, de chaque côté, une bande de 2 m de large en faisant un angle α avec l'horizontale.



Le but de l'exercice est de trouver l'angle α qui maximise l'aire de la section, donc le volume de la cuve.

La section est assimilée à un trapèze isocèle $ABCD$ tel que $AB = BC = CD = 2$ m et (AD) est parallèle à (BC) .

H est le projeté orthogonal de B sur (AD) .

1. Expliquer pourquoi $\widehat{BAH} = \alpha$.
2. Montrer que $h = 2 \sin(\alpha)$ et que $AD = 2 + 4 \cos(\alpha)$.
3. Montrer que l'aire du trapèze $ABCD$ est $S(\alpha) = 4 \sin(\alpha) + 4 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$.
4. On considère la fonction f définie sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ par $f(\alpha) = 4 \sin(\alpha) + 4 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$.
 - a) Montrer que la dérivée de f est définie par $f'(x) = 4(2 \cos^2(x) + \cos(x) - 1)$.
 - b) Factoriser le polynôme $P(x) = 2x^2 + x - 1$, puis montrer que $f'(x) = 8(\cos(x) + 1)(\cos(x) - 0,5)$.
 - c) Trouver la valeur de l'angle α qui satisfasse le problème.