1 Echauffement : calcul littéral

1.1 Premier degré

Exercice nº 1. Déterminer l'ensemble de définition, puis résoudre les équations suivantes :

a) $\dfrac{5x-3}{x+1}=2$ **b)** $\dfrac{x-2}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$ **c)** $\dfrac{x-3}{2x+4}=\dfrac{x-2}{2x-5}$

Exercice nº 2. Factoriser les expressions suivantes :

$\mathbf{A} = 28x-21$

$\mathbf{B} = -x(x+3)-5(x+3)$

$\mathbf{C} = y^2+10y+25$

$\mathbf{D} = 20-5x^2$

$\mathbf{E} = 36x^2-12x+1$

$\mathbf{F} = (3x-4)^2-(8-2x)^2$

Exercice nº 3. Factoriser puis résoudre les inéquations suivantes :

a) $(x+1)(3x-2) \geqslant (4x+4)(2-x)$

b) $1-4x^2 \geqslant 0$

c) $(2x-3)^2 > 9(x+1)^2$

d) $(3x-1)^2 \leqslant 4-4x+x^2$

Exercice nº 4. Un riche diamantaire sentant sa mort prochaine fit venir ses enfants afin de leur distribuer sa fortune constituée uniquement de diamants.

L'aîné aura un diamant plus le septième de ce qui reste, le second 2 diamants plus le septième du nouveau reste, le troisième 3 diamants plus le septième du nouveau reste et ainsi de suite jusqu'au dernier enfant.

En bon père de famille, le diamantaire a pris soin de ne léser aucun de ses enfants et ainsi toutes les parts sont égales.

Quelle est la fortune du diamantaire et combien a-t-il d'enfants ?

1.2 Second degré

forme canonique

Etant donné un trinôme ax^2+bx+c, sa forme canonique est : $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

La forme canonique permet

☞ d'identifier maximum ou minimum de la fonction polynôme, atteint en $\dfrac{-b}{2a}$

☞ de factoriser le polynôme pour trouver ses racines si $\Delta \geqslant 0$ (où $\Delta = b^2-4ac$)

Exercice n° 5.

1. Ecrire sous forme canonique.

a) $x^2 + x + 1$ **b)** $-2x^2 + 4x - 6$ **c)** $2x^2 - 4x + 10$

2. A l'aide de la question 1 résoudre l'équation : $-2x^2 + 4x - 6 = -4$

3. A l'aide de la question 1 dresser le tableau de variation de f définie pour tout $x \in [-10; 10]$ par $f(x) = 2x^2 - 4x + 10$. En déduire les valeurs du maximum et du minimum de f.

racines de $ax^2 + bx + c$

On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$ le trinôme possède 2 racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$ le trinôme possède une racine double : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ le trinôme ne possède pas de racine.

Remarque. Si x_1 et x_2 sont les racines d'un trinôme $ax^2 + bx + c$, on peut noter :

$$S = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad P = x_1 x_2$$

Alors : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - Sx + P)$

Exercice n° 6.

1. Vérifier que -1 est racine de $x^2 + 3x + 2$

2. A l'aide de la somme et du produit des racines en déduire l'autre racine.

Exercice n° 7.

1. Vérifier que 2 est solution de $x^2 - 5x + 6 = 0$

2. Par identification trouver l'autre racine.

Exercice n° 8. Trouver une racine évidente et en déduire l'autre sans calculer le discriminant.

a) $x^2 - 7x + 6$ **c)** $x^2 + 3x - 10$ **e)** $x^2 + 5x + 4$

b) $-3x^2 + 2x + 5$ **d)** $x^2 + x - 6$ **f)** $2x^2 + x\sqrt{5} - 15$

Exercice n^{o} 9. Soit $m \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - (m+1)x + 4$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle une seule solution ? Calculer dans ce cas cette racine.

2. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $f(x) = 0$ n'a-t-elle aucune solution ?

Exercice n^{o} 10. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $3x^2 + 18x + 27 > 0$

b) $x^2 - 5x + 7 \geqslant 0$

c) $(x+10)(-3x^2 + 5x - 4) > 0$

d) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x+1} = 2x - 1$

e) $\dfrac{3x}{x+2} - \dfrac{x+1}{x-2} = -\dfrac{11}{5}$

Exercice n^{o} 11. Une entreprise produit entre 0 et 50 balançoires par jour.
Le coût de fabrication de x balançoires, en euro, est donné par la fonction suivante : $f(x) = x^2 + 230x + 325$
Chaque balançoire est vendue 300€, et toute la production est vendue.

1. Exprimer le bénéfice $B(x)$ réalisé par l'entreprise en fonction de x.

2. Etudier les variations de la fonction B.

3. En déduire le bénéfice maximal réalisé par l'entreprise.

4. Combien de balançoires l'entreprise doit-elle produire et vendre pour être rentable ?

2 Suites

2.1 Généralités

Exercice n^{o} 12. Pour les suites suivantes calculez u_0, u_1, u_2, u_3, et u_{10} lorsque c'est possible.

a) $u_n = \sqrt{n-1} + 2n$

b) $u_n = \dfrac{5n-3}{2n-2}$

c) $u_n = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$

Exercice n^{o} 13. Pour les suites suivantes calculez u_0, u_1, u_2, u_4.

a) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

Exercice n^{o} 14. Pour les suites suivantes, définies sur $\mathbb{N}$, étudiez leur sens de variation.

a) $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$

b) $u_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$

c) $u_n = (n-5)^2$ pour $n \geq 5$

d) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - n$

Exercice n° 15. Déterminer les variations des suites suivantes :

a) $u_n = n^2 - n$

b) $v_n = \dfrac{2^n}{5^{n+1}}$

c) $w_n = -3^n$

d) $z_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

2.2 Suites arithmétiques

suite arithmétique

Une suite (u_n) de premier terme u_0 est arithmétique si il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.

Une suite (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

Somme de termes consécutifs : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$

$$S = \frac{(\text{nombre de termes})(1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Exercice n° 16. Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Si oui donner leur raison.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n+5}{n+1}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{-3n+5}{8}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n^2+4n+3}{n+3}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n^2+1}{n+2}$

Exercice n° 17. Lorentz place 1000€ au taux simple de 5%, c'est à dire que chaque année la somme augmentera de 5% de la somme initiale. Pour tout entier n, u_n désigne le capital de Lorentz n années après son placement.

1. Déterminer u_0, u_1, u_2 et u_3.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3. Prouver que la suite (u_n) est arithmétique. Donner sa raison et son premier terme.

4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

5. Au bout de combien d'années le capital de Lorentz aura-t-il doublé ?

Exercice n° 18. Soline a une grande collection de matriochka, parmi ces poupées russes, la plus petite mesure 1 cm. Chaque poupée se trouve dans une poupée qui mesure 0,5 cm de plus qu'elle. On note u_n la taille de la $\text{n}^{\text{ème}}$ poupée dans l'ordre croissant.

1. Exprimer (u_n) en fonction de n

2. Quelle est la taille de la 10^{e} poupée ?

3. Si au lieu d'emboiter les poupées, on les empilait, quelle serait la hauteur d'une pile formée de 10 poupées ?

Algorithme

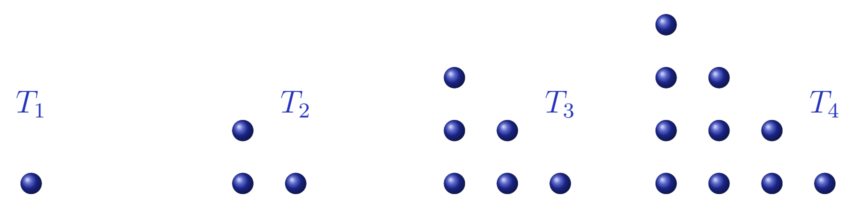
Pour calculer le n^{e} terme d'une suite arithmétique (plus généralement définie par récurrence) (u_n) de raison r on peut utiliser une boucle « for » :

```
def terme(n):
        u=5
        for i in range(n):
                u=u+r
        return u
```

Pour déterminer le rang à partir duquel une suite monotone (par exemple croissante) dépasse un seuil (inférieur à sa limite) on peut utiliser une boucle « while ».

```
def seuil(s):
        u=5
        i=0
        while u<s :
                u=u+r
                i=i+1
        return i
```

Exercice n° 19. Voici les quatre premiers nombres triangulaires :



1. Représenter et donner les valeurs de T_5 et T_6.

2. Ecrire une fonction, appelée « triangle », codée en Python, en mode itératif et en mode récursif, permettant de calculer un nombre triangulaire quelconque T_n, où n est un entier. Donner les valeurs de T_{12} et T_{60}.

3. Retrouver les résultats précédents par le calcul.

4. Ecrire un algorithme permettant de trouver les valeurs de n telles que : $T_n \geqslant 100$ puis $T_n \geqslant 1000$.

5. Retrouver ces résultats par le calcul.

2.3 Suites géométriques

suite géométrique

Une suite (u_n) de premier terme u_0 est géométrique si il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = qu_n$.

Une suite est géométrique de premier terme u_0 et de raison q, si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n$.

Somme de termes consécutifs : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Exercice n° 20. Dans chaque cas, calculer v_{20}

1. (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ telle que $v_3 = 12$.

2. (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -2$ telle que $v_{32} = 32$. ‘

3. (v_n) est définie par $\begin{cases} v_0 = -5 \\ v_{n+1} = 2v_n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Exercice n° 21. Les suites suivantes sont-elles géométriques ? Si oui donner leur premier terme et leur raison.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{4^n}{3^{n+1}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-7)^n$

c) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5n + 2^n$

d) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{3^n}$

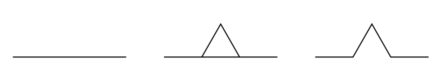
Exercice n° 22. (v_n) est une suite géométrique calculer sa raison, son premier terme, et exprimer v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) $v_3 = 6$ et $v_8 = 1458$

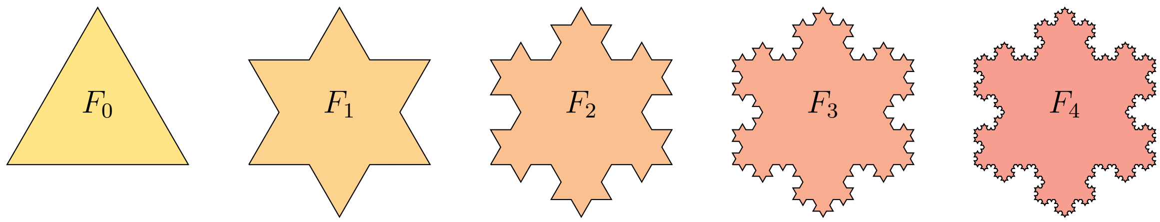
b) $v_6 = -18$ et $v_{12} = -\dfrac{9}{32}$

Exercice n° 23. Le flocon de Von Koch est construit de la façon suivante :

- On part d'un triangle équilatéral ;
- A chaque étape de construction on remplace tout segment par une ligne brisée :
  - On coupe le segment en trois parties égales ;
  - on construit un triangle équilatéral ayant pour base le segment médian ;
  - on supprime le segment médian.



- On répète ces opérations : au bout d'un nombre infinie d'étape, on obtient le flocon de Von Koch.



Exprimer à l'aide d'une suite le périmètre du flocon F_n. Ecrire un programme python qui permette de savoir à partir de quelle étape le périmètre du flocon dépasse 1 km.

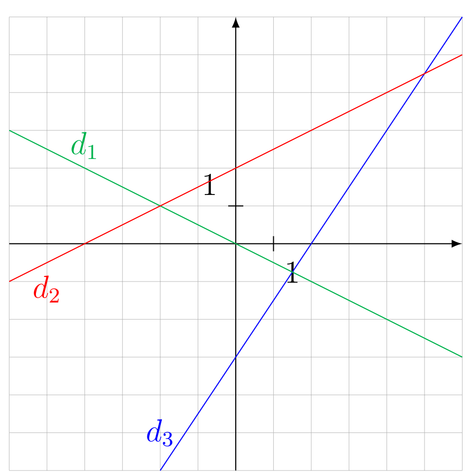
Exercice n° 24. Le gazon d'un champ de 5 000 m^2 est envahi par des pissenlits qui détruisent 20 % de la surface en un an. Chaque automne, Catherine arrache 250 m^2 de pissenlits afin de semer de la pelouse. On pose $p_0 = 5000$ la surface initiale en m^2 de pelouse et p_n la surface à la fin de n années où $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer la surface de pelouse au bout d'une et deux années.
2. Exprimer pout tout $n \in \mathbb{N}$, p_{n+1} en fonction de p_n.
3. On définit pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par $v_n = p_n - 1250$
   a) Déterminer la nature de la suite (v_n) et son premier terme.
   b) Donner l'expression du terme général de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   c) En déduire une expression de p_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
4. Quelle est le sens de variation de la suite (p_n) ?
5. Quelle sera l'aire de gazon sans pissenlit au bout de 10 ans ?
6. Dans combien d'années la surface de gazon sera-t-elle inférieure à 1000 m^2 ?

3 Dérivation

3.1 Dérivée

Exercice n° 25. Lire la pente de chacune des droites représentées.



Exercice n° 26.

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x + 3$, montrer qu'elle est dérivable en -1 et donner $f'(-1)$.

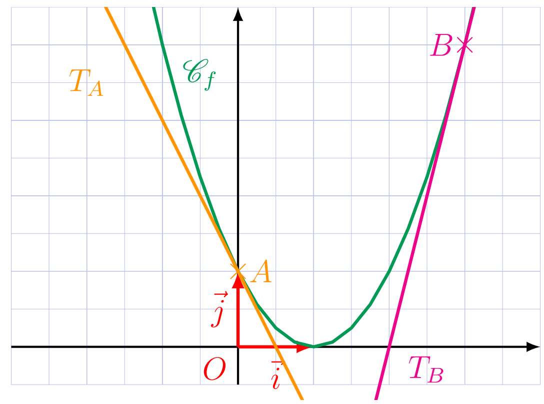
2. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $g(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$. Montrer que g est dérivable en 3 et calculer $g'(3)$.

Exercice n° 27.

Soit f la fonction définie et dérivable sur $[-2; 4]$ représentée ci-contre par la courbe $\mathscr{C}_f$.

1. Par lecture graphique donner la valeur du nombre dérivé en 0.

2. Déterminer graphiquement $f'(3)$.



Exercice n° 28. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Soit a un réel, à l'aide du taux de variation de f en a, justifiez que f est dérivable en a et exprimer $f'(a)$.

En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 1.

dérivées usuelles

Fonction	Dérivée
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$	$f'(x) = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$

Fonction	Dérivée
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

Exercice n° 29. Pour les fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition, puis calculer leur dérivée en précisant les valeurs pour lesquelles cette dérivée existe.

a) $f(x) = 3x + 7$

b) $g(x) = x^2 - x$

c) $h(x) = -2x^3 + 5x^2 - x + 5$

d) $k(x) = \sqrt{x} - \dfrac{4}{x}$

e) $l(x) = \dfrac{-2x^6 + 4x^2 - 1}{4}$

f) $p(x) = x - \sin x$

propriétés de dérivation

Opération	Dérivée
Somme	$(u+v)' = u' + v'$
Produit scalaire	$(\lambda u)' = \lambda u'$
Produit	$(uv)' = u'v + v'u$
Inverse	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$
Quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

Opération	Dérivée
Puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Racine	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
Exponentielle	$\left(e^u\right)' = u'e^u$

Exercice n° 30. Pour les fonctions suivantes calculez leur dérivée en précisant les valeurs pour lesquelles le calcul est valable.

a) $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$

b) $f(x) = x \sin x$

c) $f(x) = \sqrt{x}\cos x$

d) $f(x) = -\dfrac{4}{x^3}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

f) $f(x) = \dfrac{2-x^2}{2+x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$

h) $f(x) = \dfrac{2}{5x} - \dfrac{3x}{4}$

i) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

j) $f(x) = \dfrac{x^2+8}{2\sqrt{x}-5}$

Exercice n° 31. Même consigne.

a) $f(x) = \sqrt{1-4x}$

b) $fx) = \dfrac{1}{(2+x)^2}$

c) $f(x) = (-2x+7)^3$

3.2 Variations

Exercice n° 32. Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$ et $g(x) = \dfrac{-5}{x+1}$

1. Déterminez les dérivées des fonctions f et g. Que remarque-t-on ?

2. Calculez $f(x) - g(x)$. Pouvait-on ainsi prévoir la remarque de la question 1 ?

variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I ;
- si $f' > 0$ sur I, alors f est croissante sur I ;
- si $f' < 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.

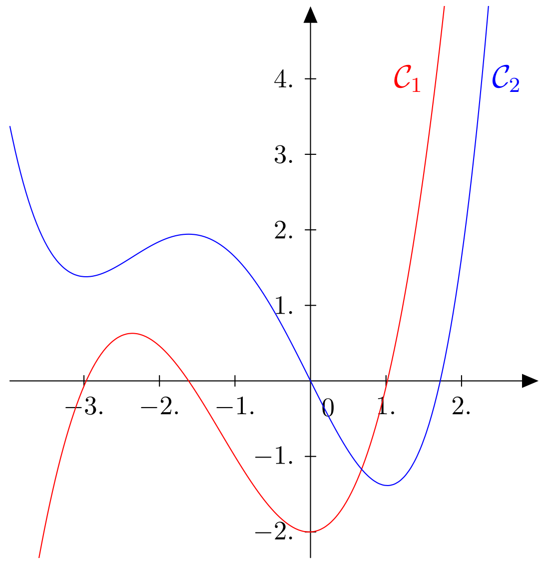
Exercice n° 33. Déterminer le sens de variation de chacune de ces fonctions. Précisez les valeurs de x pour lesquelles les calculs sont valables.

a) $f(x) = \dfrac{-1}{x+1}$

b) $f(x) = -2\sqrt{x} - 5$

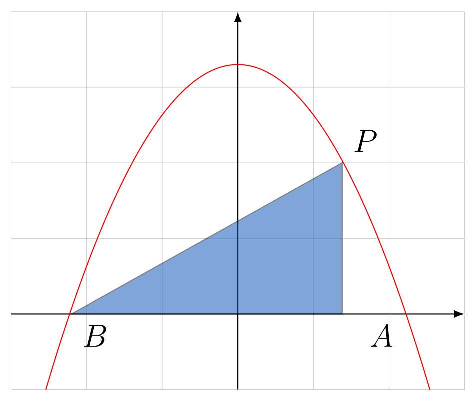
c) $f(x) = \sqrt{2x^4+5}$

Exercice n° 34. Voici deux courbes représentatives de fonction. L'une représente la fonction f, l'autre la fonction g. Sachant que $g = f'$, associer chaque courbe à sa fonction.



Exercice n° 35.

La parabole d'équation $y = \frac{-2}{9}x^2 + 8$ coupe l'axe des abscisses en A et B.
Le point $P(x; y)$ se déplace sur la parabole entre A et B.
Déterminez les coordonnées du point P pour que l'aire du triangle rectangle coloré soit maximale.



Exercice n° 36. Un audit financier fournit, à une entreprise, un modèle de coût de fabrication ; pour $q \in [0; 500]$ objets produits le coût en euro est donné par :

$$C(q) = q^2 - 10q + 1500$$

L'entreprise vent chaque objet 300€.

1. Quels sont les coûts fixes ? Déterminez q pour que les coûts soient égaux à 3 500€.

2. Exprimez la fonction recette totale R en fonction de q.

3. Calculez la quantité d'objets à produire et à vendre pour que cette entreprise réalise un bénéfice maximal.

4. Donner ce bénéfice en euro.

5. Pour quelle quantité d'objets fabriqués et vendus, le bénéfice est-il strictement positif ?

tangente à la courbe

La tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point d'abscisse a admet pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exercice nº 37. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+2}$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 2x - 1$. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives.

1. Etudier les variations de f et g sur leur ensemble de définition.

2. Calculer pour tout réel $x \neq -2, g(x) - f(x)$.

3. En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

4. Montrer que ces courbes sont tangentes en 0.

Exercice nº 38.

Partie A

Soit $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

1. Justifier qu'il existe des réels a, b, et c avec $a \neq 0$ tels que : $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$

2. Déterminer les réels a, b et c.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x+x^2}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère othonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.

2. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

3. **a)** Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}_A$ à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1, et étudier la position relative de $\mathcal{T}_A$ et de $\mathscr{C}_f$. On pourra s'aider de la partie A.

b) Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}_B$ à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 0, et étudier la position relative de $\mathcal{T}_B$ et de $\mathscr{C}_f$.

c) Placer dans un repère les points A et B, tracer les tangente $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_B$.

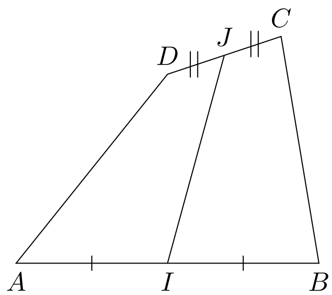
4. De la même façon déterminer les équations des tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points C et D d'abscisse respectives 1 et 2, puis tracer les.

5. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

4 Géométrie

4.1 Rappel

Exercice nº 39.



$ABCD$ est un quadrilatère quelconque les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$ sont I et J.

1. Ecrire $\overrightarrow{IJ}$ comme la somme de $\overrightarrow{AD}$ et de deux autres vecteurs que l'on précisera.
2. Décomposer de même $\overrightarrow{IJ}$ en utilisant $\overrightarrow{BC}$.
3. En déduire que : $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

déterminant

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, leur déterminant est le nombre tel que :

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si : $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$.

Exercice nº 40. Dans chacun des cas, les points sont-ils alignés ?

a) $A(-1;1)$; $B\Big(1;2\Big)$; $C\left(-\dfrac{3}{7};\dfrac{7}{6}\right)$

b) $A\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{-1}{2}\right)$; $B\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right)$; $C\left(\dfrac{-1}{2};-1\right)$

Exercice nº 41. On veut démontrer la propriété suivante : « Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul. »

1. On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Démontrer que : $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$.
2. On suppose maintenant que $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$.
   - **a)** Si l'une au moins des coordonnées de $\vec{u}$ ou de $\vec{v}$ est nulle, montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
   - **b)** Si aucune des coordonnées n'est nulle, montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

4.2 Produit scalaire

Angle et projeté orthogonal

On appelle *produit scalaire* de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel défini par :

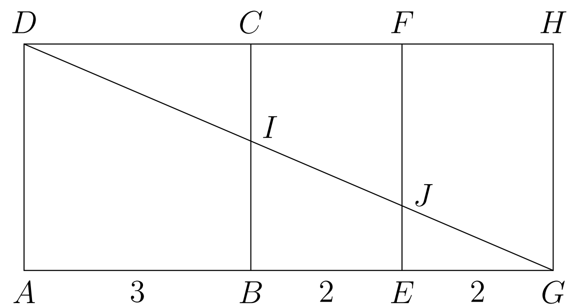
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$$

Si A, B et C sont trois points, H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors :

☞ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ *Si* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AH}$ *sont de même sens.*

☞ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ *Si* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AH}$ *sont de sens contraires.*

Exercice n° 42. Dans une unité de longueur donnée, on considère un rectangle $ABCD$ de longueur 3, accolé à deux rectangles identiques $BEFC$ et $EGHF$ de longueur 2.



Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ **c)** $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AG}$ **e)** $\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{HG}$

b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF}$ **d)** $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{GD}$ **f)** $\overrightarrow{EJ}\cdot\overrightarrow{FA}$

Exercice n° 43. ABC est un triangle équilatéral de côté 8 cm. D est le milieu du segment $[AB]$.

1. Calculer la longueur CD.

2. Calculer les produits scalaires :

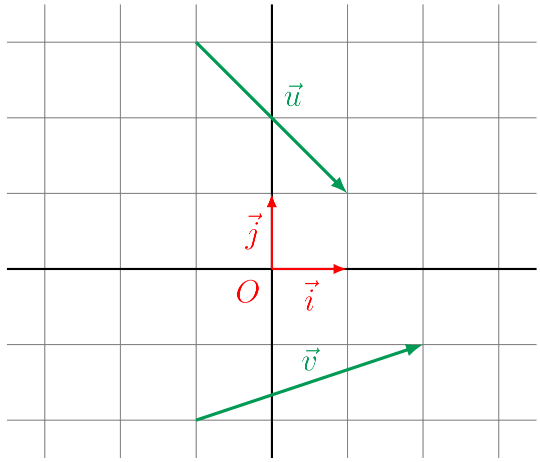
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}$ **c)** $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$

Avec les coordonnées

Dans un repère *orthonormé*, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

Exercice n° 44. Déterminer graphiquement les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, puis calculer leur norme et leur produit scalaire. En déduire une valeur approchée de $\widehat{(\vec{u};\vec{v})}$.



Exercice n° 45. On donne les points suivants : $A(2;3)$; $B(1;-2)$; $C(-3;4)$. Déterminer la valeur approchée au centième en radian de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice n° 46. Dans un repère orthonormé, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\-4\end{pmatrix}$, calculer :

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$

b) $(3\vec{u})\cdot\vec{v}$

c) $(4\vec{u})\cdot(-2\vec{v})$

d) $\vec{u}\cdot(\sqrt{2}\vec{u}-\vec{v})$

Exercice n° 47. Soient A, B et C trois points non alignés.
On construit les points M, N et P tels que $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

1. **a)** Simplifier $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{MN}=\dfrac{-1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

2. **a)** Montrer que $\overrightarrow{NP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

b) En déduire que $\overrightarrow{NP}=\dfrac{-1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

3. En déduire que le point N est le milieu de $[MP]$.

5 Exponentielle

Exercice n° 48. Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^x - x^2$ **b)** $(-2x+3)e^x$ **c)** $\dfrac{x}{e^x - 1}$

Exercice n° 49. Résoudre les équations suivantes :

a) $e^{x^2+x} = 1$ **b)** $3 + e^x = 1$ **c)** $(e^x - 1)(e^x + 1) = 0$ **d)** $(2x-1)e^x = e^x$ **e)** $xe^{x+3} = 2e^{x+3}$ **f)** $-e^{x^2+3} = \dfrac{1}{e^{x+3}}$

Exercice n° 50. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $e^{x+1} < 1$ **b)** $-3e^{x^2-4} > 4$ **c)** $e^{x+4} \leqslant \dfrac{1}{e^{3x}}$

Exercice n° 51. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$.

1. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.
2. Justifier que f est dérivable sur f puis étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que f est toujours positive.
4. En déduire la position relative de la courbe représentative de la fonction exponentielle et de sa tangente en 0.

Exercice n° 52. On définit les fonctions cosinus et sinus hyperbolique sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. **a)** Montrer que ch est paire. Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?
   b) Etudier les variations de ch sur $[0; +\infty[$
   c) En déduire le tableau de variation de la fonction ch.
2. Démontrer de même que sh est impaire et dresser le tableau de variation de sh sur $\mathbb{R}$.
3. Simplifier l'expression $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)$
4. Calculer pour tout x réel $(\mathrm{ch}(x))^2 - (\mathrm{sh}(x))^2$
5. Montrer que pour tout x réel $\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)$.

