1 Le point en calcul

1.1 Nombres rationnels

Exercice n° 1. Calculer sans calculatrice.

a) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{7}{15}$ **b)** $\dfrac{13}{30}-\dfrac{7}{15}+\dfrac{5}{3}$ **c)** $\dfrac{-2}{12}+\dfrac{3}{28}$ **d)** $\dfrac{-14}{45}-\dfrac{1}{18}$

Exercice n° 2. Sans calculatrice, déterminer l'écriture simplifiée de l'expression suivante : $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}$

Exercice n° 3. Sans calculatrice calculer et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{7}{12}-\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{2}$ **b)** $\dfrac{7}{4}\div 2-\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{-3}$ **c)** $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2-\dfrac{-5}{6}$

Exercice n° 4. Calculer en détaillant les étapes et déterminer le plus petit ensemble de nombres auquel appartient chacune de ces expressions.

$$\mathbf{A}=\frac{8}{3}-\frac{\frac{5}{3}}{\frac{20}{21}} \qquad \mathbf{B}=\frac{2+\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}$$

1.2 Puissances et racines carrés

Propriétés

Si a et b sont deux réels, m et n deux entiers, alors :

- $a^n\times a^m=a^{n+m}$
- $(a^n)^m=a^{n\times m}$
- $(ab)^n=a^n\times b^n$

Si a est non nul, $\dfrac{1}{a^n}=a^{-n}$ et les propriétés précédentes s'appliquent avec des exposants négatifs.

Si a et b sont des réels *positifs*, alors :

- $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $(b\neq 0)$
- ⚠ non "compatible" avec l'addition

Exercice n° 5. Ecrire sous la forme d'une seule puissance.

a) $2,5\times 2,5^6$ **c)** $(-7)^{-3}\times(-7)^4$ **e)** $\dfrac{9^{-5}}{3^{-2}}$

b) $\dfrac{5^3}{5^9}$ **d)** $(-2,2^{11})^3$ **f)** $0,8^{-4}\times 5^{-4}$

Exercice n° 6. Une molécule d'hydrogène pèse 1,008 unité de masse atomique. Une unité de masse atomique représente $1,660538922 \times 10^{-27}$ kg. Dans un litre d'hydrogène, il y a $5,38 \times 10^{22}$ molécules.

Quelle est la masse d'un litre d'hydrogène ?

Exercice n° 7.

1. Ecrire en langage python un programme qui calcule les dix premières puissances d'un nombre a.

2. Modifier ce programme pour qu'il détermine la plus grande puissance de a inférieure à un nombre b.

Exercice n° 8. Calculer sans calculatrice :

a) $\sqrt{5}^2$ **b)** $\sqrt{(-6)^2}$ **c)** $\sqrt{4^4}$

Exercice n° 9. Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$.

$\mathbf{A} = \sqrt{50} + \sqrt{8} + \sqrt{18}$ $\mathbf{B} = \sqrt{75}+\sqrt{48}+\sqrt{300}$ $\mathbf{C} = \sqrt{175}+\sqrt{63}+\sqrt{28}$

Exercice n° 10. On considère le triangle ABC tel que : $AB = 4\sqrt{3}$; $BC = 2\sqrt{12}$ et $CA = 4\sqrt{6}$. Quelle est la nature de ce triangle ?

1.3 Pour aller plus loin

Exercice n° 11. On appelle nombre d'or le nombre $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Supposons que $\varphi = \dfrac{p}{q}$, avec p et q entiers, cette fraction étant irréductible.

1. Vérifier que $\varphi^2 = \varphi + 1$. En déduire que : $p^2 = q^2 + pq$.

2. **a)** Si p et q sont impairs, quelle est la parité de p^2 ? Et celle de $q^2 + pq$? Est-ce possible ?

b) Mêmes questions si p est pair et q est impair.

c) Mêmes questions si p est impair et q est pair.

d) p et q peuvent-ils être tous les deux pairs ?

3. En déduire la nature de φ.

Exercice n° 12. Soit $n \in \mathbb{N}$, simplifier le plus possible les nombres suivants :

a) $3 \times 2^n - 6 \times 2^n$

b) $5 \times 5^n - 5^n$

c) $2 \times (-1)^n - 3 \times (-1)^n$

d) $\dfrac{1-3^n}{1-3}$

e) $\dfrac{2}{5} \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}$

Exercice n° 13. On considère un entier naturel n non nul.

1. On pose $S_n = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n$

a) En remarquant que $S_n = n+(n-1)+\cdots+3+2+1$, déterminer une expression de $2S_n$ en fonction de n.

b) En déduire une expression de S_n en fonction de n.

c) Calculer : $1+2+3+\cdots+1031$.

2. Déduire des questions précédentes que $n(n+1)$ est toujours un nombre pair si n est un entier non nul.

2 Calcul littéral

2.1 Développer

Développer

Développer, c'est transformer un produit en somme.

$$k \times (a+b) \xrightarrow{\text{développer}} ka+kb$$

$$k\times(a+b) = ka+kb$$

Exemple : $5(3-2y) = 15-10y$

---

a) $3x(6+x)$

b) $-5(7y+2)$

c) $3x-4(x-2)$

d) $x(8-9x)$

e) $-9x(-2x+1)$

f) $(2x-2)(-4x+11)$

Exercice n° 14. Développer et réduire les expressions suivantes :

A $= -7(-x-2)$

B $= (5x-2)(3x+2)$

C $= 9(x+4)(6x-2)$

D $= (2x+1)^2$

E $= (6x-9)^2$

F $= (-x-3)^2$

G $= (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

H $= (\sqrt{8}x+7)^2$

Identités remarquables

Pour tout réel a, et b :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\\underbrace{(a+b)(a-b)}_{\text{forme factorisée}} &= \underbrace{a^2-b^2}_{\text{forme développée}}\end{aligned}$$

Exercice n° 15. Montrer les identités suivantes pour tout x et y réels :

a) $\frac{1}{2}\left((x+y)^2+(x-y)^2\right)=x^2+y^2$ **b)** $\frac{1}{4}\left((x+y)^2-(x-y)^2\right)=xy$

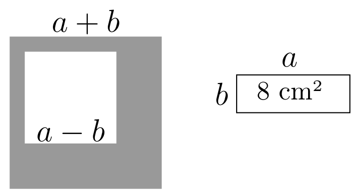
Exercice n° 16. On considère l'expression $A(x)=x^2+8x+15$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A(x)=(x+4)^2-1$

2. Montrer que $A(x)=(x+3)(x+5)$

3. En choisissant la forme de $A(x)$ la plus adaptée au calcul mental, calculer $A(0)$; $A(-3)$; $A(-4)$; $A(-5)$.

Exercice n° 17. Un fabricant de petit électroménager souhaite produire une station météo. L'écran se trouve dans le carré blanc. Les dimensions sont indiquées sur le schéma ci-contre. Calculer la surface de plastique nécessaire pour fabriquer la face avant.



2.2 Factoriser

Factoriser

Factoriser une expression, c'est transformer une somme en produit.

$$k\times(a+b)=ka+kb$$

$$\xleftarrow{\text{factoriser}}$$

Exemple : $5x-75=5(x-15)$

---

a) $5x^2-4x$ **b)** $4ab^3-10a^2b^2+6a^3b^2$

Exercice n° 18. Factoriser les expressions suivantes :

A $=(3x+1)(7x-2)+(3x+1)^2$

B $=(7x-3)^2-3$

C $=x^2-10x+25$

D $=7x^2+14x+7$

Exercice n° 19. On considère la fonction $f:x\longmapsto x^3-x$.

1. Factoriser l'expression x^3-x.

2. En déduire les racines de la fonction f.

Exercice n° 20. Factoriser les expressions suivantes :

A $=64t^2-9$

B $=9x^2+25+30x$

C $=-121-66x-36x^2$

D $=x^2-28x+196$

Exercice n° 21. On souhaite factoriser l'expression suivante : $A(x) = 16x^2 + 24x + 5$

1. Montrer que $A(x) = 16x^2 + 24x + 9 - 4$

2. Factoriser l'expression : $16x^2 + 24x + 9$

3. En déduire la factorisation de $A(x)$.

Exercice n° 22. En vous inspirant de l'exercice précédent, factoriser les expressions suivantes :

A $= x^2 + 10x + 9$ **B** $= 4x^2 + 32x + 39$ **C** $= 49x^2 + 28x - 3$

Exercice n° 23. On souhaite factoriser l'expression suivante : $A(x) = x^2 + x - 2$

1. Vérifier que $A(1) = 0$. On dit alors que 1 est une racine évidente du polynôme A.

2. On sait que dans ce cas A se factorise par $(x - 1)$. On cherche alors a et b réels tels que $A(x) = (x - 1)(ax + b)$.

En développant l'expressions $(x - 1)(ax + b)$ et en vous aidant de l'expression développée de A déterminez a et b.

3. Conclure.

Exercice n° 24. Factoriser en cherchant une racine évidente pour chacune des expressions.

a) $A(x) = x^2 + 3x - 10$

b) $B(x) = x^2 + 6x + 8$

c) $C(x) = 2x^2 - 3x - 9$

d) $D(x) = 5x^2 + x - 4$

2.3 Equations ; inéquations

Produit nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $2x^2 = 9$

b) $4(x - 3)(5x + 2) - (x^2 - 9) = 0$

c) $-x^2 + 4x = 3$

d) $x^2 + 3x = -2x - 6$

Exercice n° 25. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivante :

a) $\dfrac{3x - 7}{5x + 3} - 4 = 0$

b) $\dfrac{x - 4}{3x + 4} = \dfrac{2x - 7}{6x - 1}$

c) $\dfrac{2x + 9}{5 - 4x} = 8$

d) $\dfrac{2x + 5}{x + 4} = \dfrac{4x + 5}{3x + 3}$

tableau de signe

Pour étudier le signe d'un produit, on étudie le signe de chacun de ses facteurs.

Etude du signe de $h(x) = \dfrac{3x-5}{2x+7}$

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Exercice n° 26. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivante :

a) $2x+1>3$

b) $\dfrac{-9x+1}{5}>11$

c) $-5x+\dfrac{1}{3} \leqslant 3(\dfrac{3}{5}x-2)$

d) $x^2 \leqslant 4$

e) $3(x-1)(x+2) \geqslant 0$

f) $4(x-3)^2 \leqslant (7+4x)^2$

Modéliser un problème

☞ On choisit l'inconnue ;

☞ on traduit le problème par une équation ou une inéquation ;

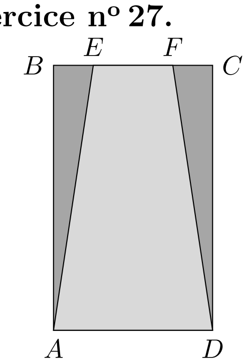
☞ on résout l'équation ou l'inéquation ;

☞ on vérifie que le ou les résultats sont bien des solutions du problème.

a) Trouver trois nombres entiers consécutifs dont la somme soit égale à 2025.

b) Un père de 41 ans a trois enfants âgés de 6 ans, 9 ans, et 12 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal à la somme des âges de ses enfants ?

Exercice n° 27.



On modélise un miroir par un trapèze $ADEF$, celui-ci est placé dans le cadre rectangulaire $ABCD$.

On pose : $EF = x$; $BE = FC$; $AD = 30$; $AB = x+20$.

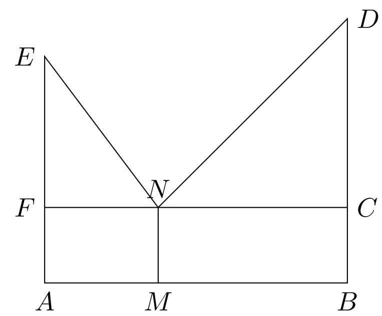
Quel doit-être la distance minimale EF pour que la surface du miroir soit supérieure ou égale aux neuf dixièmes de l'aire totale de $ABCD$?

Exercice n° 28.

On considère la figure ci-contre, dans laquelle $ABCF$ est un rectangle, $E \in [AF]$, $D \in [BC]$, $AB = 10$, $AF = 2$, $AE = 8$, $BD = 10$.

$M \in [AB]$, et $N \in [CF]$ de sorte que $AMNF$ soit un rectangle.

A quelle distance du point A faut-il placer le point M pour que l'aire de $AMNE$ soit supérieure ou égale à celle de $MBDN$?



Exercice n° 29. a et b désignent deux nombres réels positifs.

1. Développer $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$;
2. Justifier que $a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geq 0$
3. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

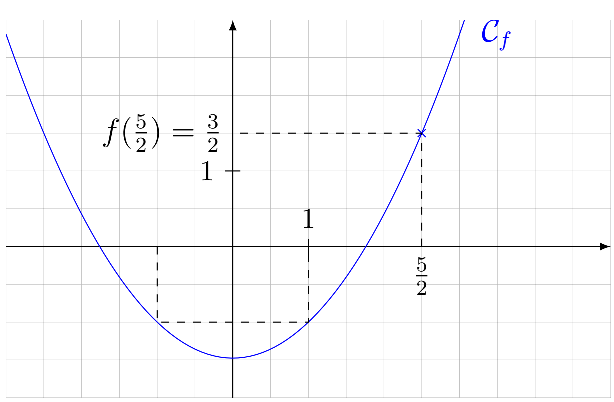
   Pour tout nombre réels positifs a et b, $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
4. x, y et z sont trois réels positifs. Montrer que :

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

3 Fonctions

3.1 Généralités

Vocabulaire



- Par la fonction f, $\frac{5}{2}$ possède une unique *image*, $\frac{3}{2}$ qu'on lit sur l'axe des ordonnées ;
- par la fonction f, -1 possède deux *antécédents*, -1 et 1 qu'on lit sur l'axe des abscisses ;
- l'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des nombres qui ont une image par cette fonction.
- la courbe représentative de la fonction f est l'ensemble noté $\mathcal{C}_f$ des points de coordonnées $(x; f(x))$.

image

Pour trouver l'image d'un nombre, on peut :

☞ Utiliser un graphique ;

☞ utiliser un tableau de valeur ;

☞ calculer en utilisant l'expression algébrique de la fonction.

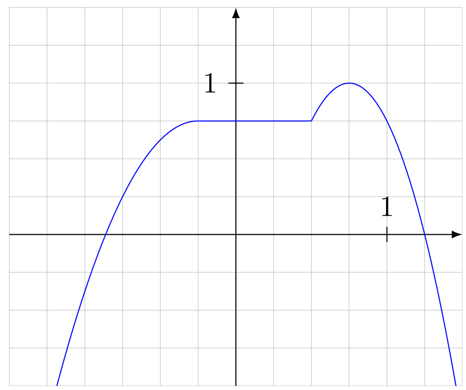
Dans chaque cas donner l'image de $\frac{3}{4}$ par la fonction f.

a)

x	$-\frac{3}{4}$	$\frac{-1}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{9}{12}$
$f(x)$	-7	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$

b) $f(x) = \dfrac{\frac{3x}{5} - \frac{7}{4}}{x^2 - \frac{9}{4}}$

c)



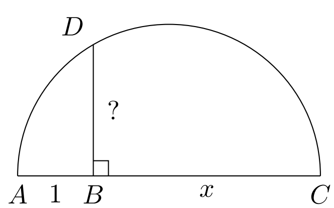
Exercice n° 30. f est la fonction inverse.

1. Calculer $f(2)$

2. Calculer $f(1 + f(2))$

3. Calculer $f(1 + f(1 + f(2)))$. Commenter l'évolution des nombres ainsi obtenus.

Exercice n° 31. On considère un demi-cercle de diamètre $[AC]$, B est un point du segment $[AC]$ tel que $AB = 1$. D appartient au demi-cercle de sorte que $[AC] \perp [BD]$. On note x la longueur BC, exprimer BD en fonction de x.



Indication : on pourra noter que ADC est un triangle rectangle.

antécédent

Pour déterminer un antécédent, on peut :

- ☞ Utiliser un graphique ;
- ☞ utiliser un tableau de valeurs ;
- ☞ résoudre une équation en utilisant l'expression algébrique de la fonction.

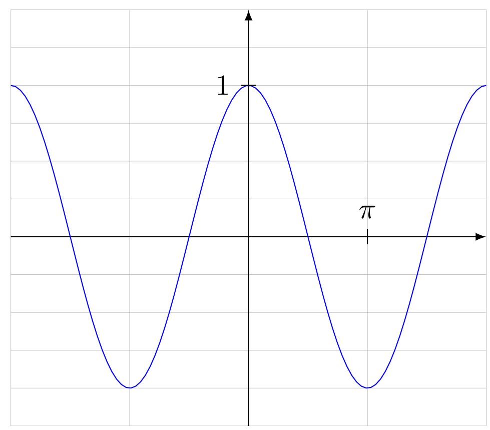
Dans chaque cas donner un antécédent de $\frac{1}{2}$ par la fonction f.

1.

x	0	0.5	1	1.5
$f(x)$	-1	0	$\frac{1}{2}$	-0.5

2. $f(x) = -9x + 2$

3.



Exercice n° 32. On donne le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre non nul ;
- l'élever au carré ;
- prendre l'inverse du résultat.

1. Appliquer ce programme au nombre 2.

2. Ambre cherche un nombre x tel que si on lui applique ce programme, on retrouve x.

a) Montrer que si ce nombre existe alors il est l'antécédent de 1 par la fonction cube.

b) Quel nombre Ambre doit-elle choisir ?

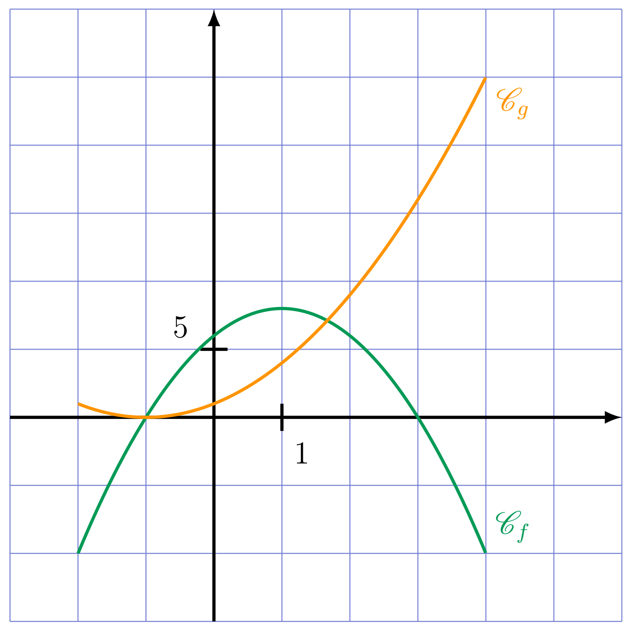
Exercice n° 33. Un cycliste s'entraîne à parcourir la distance d'un kilomètre en un minimum de temps.

1. Exprimer la vitesse moyenne v en fonction du temps t.

2. Quel doit être le temps de parcours pour atteindre la vitesse moyenne de 60 km.h^{-1} ?

Exercice n° 34.

On donne les courbes représentatives des fonctions f et g sur $[-2;4]$.



Partie A : Résoudre graphiquement :

1. $f(x) = -10$
2. $f(x) \geqslant 0$
3. $f(x) > 5$
4. $f(x) = g(x)$
5. $f(x) = 15$
6. $f(x) \leqslant g(x)$

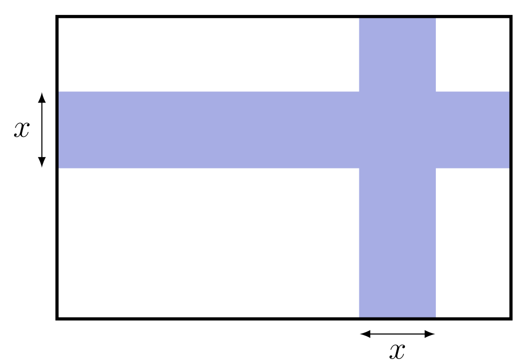
Partie B : Dans cette partie on admet que les fonction f et g sont définie sur $[-2;4]$ repsectivement par les expressions $f(x) = (x+1)(6-2x)$ et $g(x) = x^2 + 2x + 1$.

1. Développer $f(x)$.
2. Montrer que $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$ pour tout $x \in [-2;4]$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée, répondre aux questions suivantes.
   a) Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
   b) Déterminer les antécédents de 4 par la fonction f.

3.2 Etude de fonctions

Exercice n° 35.

On considère un rectangle de longueur 7 et de largeur 5.
On trace à l'intérieur de celui-ci une croix de largeur x variable.
On s'intéresse à la fonction $\mathcal{A}$ donnant l'aire de la surface bleue en fonction de x.



1. Quel est son ensemble de définition ?
2. Précisez $\mathcal{A}(x)$.
3. Quelle valeur peut-on donner à x pour que l'aire $\mathcal{A}$ soit inférieur ou égale à l'aire restante ?

Déterminer la parité

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$.

Pour montrer qu'elle est paire, il faut vérifier que :

- ☞ Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$;
- ☞ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.

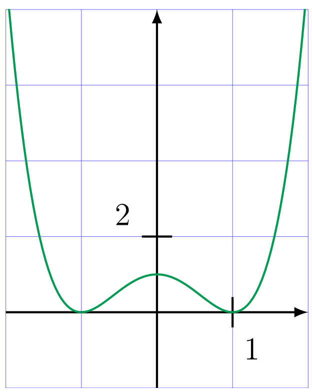
Pour montrer qu'elle est impaire, il faut vérifier que :

- ☞ Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$;
- ☞ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Exemple : Déterminer la parité des fonctions carré, inverse, racine carrée.

Remarque. La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, celle d'une fonction impaire par rapport à l'origine du repère.

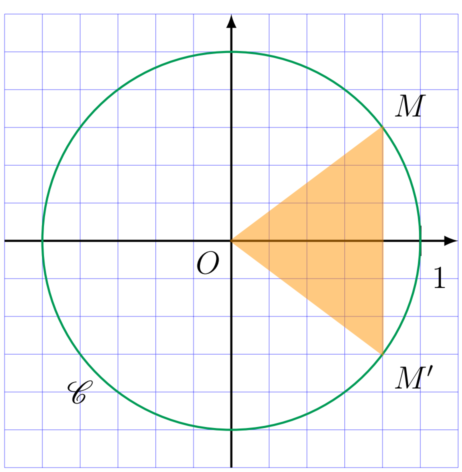
Exercice nº 36. On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction h définie sur $\mathbb{R}$.



1. Conjecturer la parité de h.
2. La fonction h est définie pour tout réel x par l'expression $h(x) = (x^2 - a)^2$, où a est un réel fixé.

   Sachant que la courbe représentative de h passe par le point de coordonnées $(1; 0)$, déterminer la valeur de a.
3. Le point $B(1,5; 2)$ appartient-il a la courbe représentative de h ?
4. Vérifiez par le calcul l'hypothèse faite à la question 1.

Exercice nº 37. On trace à l'aide d'un logiciel la figure suivante :



1. On fait varier la position du point M sur le cercle $\mathscr{C}$, on cherche la ou les valeurs de l'abscisse x de M pour laquelle l'aire du triangle est maximale. Expliquer pourquoi on peut se limiter au « premier cadran », c'est à dire à une étude des valeurs positives de x.
2. On désigne par f la fonction qui à x associe l'aire du triangle OMM'. Montrer que : pour tout x dans $[0, 1]$, $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$.
3. Montrer que : $\forall x \in \ [0; 1], \dfrac{1}{2} - f(x) = \dfrac{1 - 2x\sqrt{1 - x^2}}{2}$
4. En utilisant l'expression conjuguée, montrer que :

$$\forall x \in \ [0; 1], \frac{1}{2} - f(x) = \frac{4x^4 - 4x^2 + 1}{4}$$

5. En utilisant une identité remarquable, conclure quand au maximum de f sur $[0, 1]$.

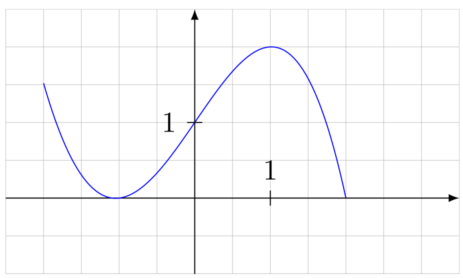
Variations

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, on dit que :

- f est croissante sur I si pour tout $u \in I$ et $v \in I$ tels que $u \leq v$, $f(u) \leq f(v)$;
- f est décroissante sur I si pour tout $u \in I$ et $v \in I$ tels que $u \leq v$, $f(u) \geq f(v)$;
- f est constante sur I si pour tout $u \in I$ et $v \in I$, $f(u) = f(v)$.

Exemple :

a) Décrire les variations de la fonction f sous la forme d'un tableau.



b) Etant donné le tableau de variation de la fonction g définie sur $[-8; 4]$, comparer $g(-7)$ et $g(-1)$ d'une part, $g(1,5)$ et $g(3)$ d'antre part.

x	-8		1		4
$g(x)$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

c) Donner, en justifiant, les variations des fonctions carré, racine carré, et inverse. Dresser leur tableau de variation.

Exercice nº 38. Sans la calculatrice comparer les nombres suivants :

a) $(\pi - 4)^2$ et $\pi - 5)^2$

b) $\dfrac{1}{-3}$ et $\dfrac{-1}{5}$

c) 7 et $\sqrt{40}$

d) $(-0,4)^3$ et $0,4^3$

Exercice nº 39. En utilisant les variations de la fonction inverse, donner l'information la plus précise possible sur $\dfrac{1}{x}$:

a) $x > 5$ **b)** $x < -4$ **c)** $6 < x \leq 7$

Exercice nº 40. En utilisant les variations de la fonction carré proposer un encadrement de x^2 :

a) $-4 < x < -1$

b) $-1 < x < 2$

c) $2 \leq x \leq 5$

d) $-4 \leq x < 5$

Exercice nº 41. Donner le tableau de variation et le tableau de signe des fonctions suivantes :

a) $x \longmapsto 6 - 3x$ **b)** $x \longmapsto 2x - 3$ **c)** $x \longmapsto x\sqrt{3} - \sqrt{2}$

Exercice n° 42. Soit f définie pout tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = |x+2| + |1-x|$

En étudiant f sur des intervalles bien choisis, donner son expression, dresser son tableau de variation et tracer sa courbe représentative.

Exercice n° 43. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5 - x^2$

1. Calculer $f(0)$;

2. Montrer que 5 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$;

3. Donner l'expression d'une fonction qui admet 100 pour maximum sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 44. Soit h la fonction définie sur $[0;4]$ par : $h(x) = -x^2 + 4x + 2$

1. Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $[0;4]$, $h(x) = -(x-2)^2 + 6$.

2. Déterminer alors le signe de $h(x) - h(2)$ sur l'intervalle $[0;4]$.

3. En déduire le maximum de h sur cet intervalle, préciser la valeur en laquelle il est atteint.

Exercice n° 45. Une usine produit de l'acier. Le coût de production de x tonnes d'acier est de $C(x) = 0,5x^2 + 500x + 25000$ euros.

1. Chaque tonne est vendue 1 000 euros. Déterminer le chiffre d'affaires réalisé en fonction de x tonnes d'acier vendues.

2. On suppose que toute la production est vendue. Montrer que le bénéfice réalisé pour x tonnes produites est de $B(x) = -0,5x^2 + 500x - 25000$ pour $x \geqslant 0$.

3. Conjecturer le bénéfice maximum que peut espérer faire l'entreprise.

4. **a)** Montrer que $B(x) = -0,5(x-500)^2 + 100000$ pour $x \geqslant 0$. Justifier que $B(x) \leqslant 100000$ pour tout $x \geqslant 0$.

b) Retrouver le résultat de la question 3. à l'aide de la question précédente.

4 Géométrie

4.1 Vecteurs

définition

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- ☞ Sa direction (AB) ;
- ☞ son sens (de A vers B) ;
- ☞ sa longueur AB.

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Exercice nº 46. $BCDA$ et $BCFE$ sont deux parallélogrammes, montrer que $ADFE$ est un parallélogramme.

Relation de Chasles

Si A, B et C sont trois points :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

Exercice nº 47. Simplifier les écritures en utilisant la relation de Chasles :

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

c) $\vec{w} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}$

Exercice nº 48.

1. Démontrer que pour tout point O, A, B, et C : $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

2. $ABCD$ est un parallélogramme et M un point quelconque. Démontrer que :

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$$

Exercice nº 49. ABC est un triangle.

1. Construire le point D tel que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Prouver que $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.

2. Construire E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$. Prouver que C est le milieu de $[ED]$.

3. Les droites (AD) et (BE) se coupent en I. Que représente I pour le triangle ABC ?

Prouver que : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BE}$

coordonnées

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

☞ Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs, k un réel : $\vec{u} + k\vec{v}\begin{pmatrix} x + kx' \\ y + ky' \end{pmatrix}$

☞ Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur : $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}$

Exercice n° 50. Dans un repère orthonormé, on considère un les points $A(3; 5)$; $B(2; -1)$; $C(-2; -4)$; $D(-1; -2)$

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et celles de $\overrightarrow{DC}$.

2. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Exercice n° 51. On considère les points $E(5; 2)$ et $B(4; -1)$.

1. Faire une figure et tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre E passant par B.

2. Calculer le rayon de $\mathscr{C}$.

3. Le point $A(8; 3)$ appartient-il à $\mathscr{C}$?

Exercice n° 52. Soient $M(-2; 2)$, $N(3; 1)$, $P(0; 6)$ et $Q(-5; 3)$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{QP}$. En déduire la nature de $MNPQ$.

2. Calculer la norme des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{MP}$ et préciser la nature du quadrilatère $MNPQ$.

3. Le repère $(M; \overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MQ})$ est-il orthonormé ?

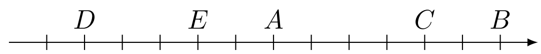
colinéarité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dit colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

On appelle déterminant de $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le nombre : $\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - yx'$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$.

Remarque. Deux vecteurs colinéaires ont même direction ce qui permet de caractériser le parallélisme ou l'alignement de trois point par exemple.

Exercice n° 53. A l'aide de la droite graduée suivante, déterminer dans chaque cas le réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.



a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$

b) $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$

c) $\vec{v} = \overrightarrow{EC}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

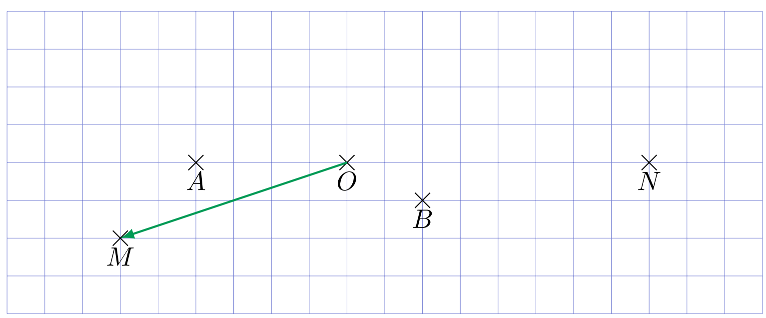
d) $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

Exercice n° 54.

1. On donne A, O et N trois points alignés comme ci-dessous. Donner une phrase contenant le mot « homothétie » utilisant ces trois points.

2. Construire le point B tel que $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{OM}$.

3. Construire l'image C de B par l'homothétie de centre O et de rapport 3.



Exercice n° 55. Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on donne les points $A(1;2)$; $B(3;1)$; $C(-4;4)$ et $D(6;-1)$

1. Prouver que les droites (CD) et (AB) sont parallèles.

2. Les points A, B, et C sont-ils alignés ?

Exercice n° 56. Dans un carré $ABCD$ de côté 4 cm, on place un point I tel que ABI soit équilatéral. On place à l'extérieur de ce carré un point J tel que BCJ soit équilatéral.

1. Que dire du repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$?

2. Dans ce repère donner les coordonnées de D, I et J.

3. Montrer que D ; I et J sont alignés.

4.2 Equations de droites

Equations de droites

- Equation réduite :
  - Pour une droite non verticale :$y = mx + p$ avec m et p deux nombre fixés.
    Vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$
  - Si la droite est parallèle à l'axe des ordonnées : $x = k$
- Equation cartésienne : $ax + by + c = 0$ avec a, b et c trois nombres fixés.
  Vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

---

a) Trouver l'équation réduite de la droite $(d) : -42x + 7y - 28 = 0$;

b) Trouver l'équation cartésienne de (AB) avec $A(2; -2)$ et $B(3; 1)$;

c) Trouver l'équation réduite de (AB) avec $A(-\sqrt{5}; \sqrt{3})$ et $B(-\sqrt{5}; \sqrt{6})$;

d) Trouver l'équation réduite de (AB) avec $A(-7; \frac{-3}{2})$ et $B(-8; 2)$.

parallélisme

Pour montrer que deux droites sont parallèles on peut :

☞ Montrer qu'elles ont la même pente (même coefficient directeur) ;

☞ Montrer que leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Dans chaque cas, vérifier si les droites sont parallèles :

a) $d_1 : 3x + 6y - 9 = 0$ et $d_2 : 0,5x - y - 1,5 = 0$

b) $d_1 : -2x + 3y - 5 = 0$ et $d_2 : -6x + 9y + 1 = 0$

Intersection de droite

Pour trouver les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes, on résout un système de deux équations à deux inconnues.

☞ Par substitution ;

☞ par combinaison.

Exercice n° 57. Dans le désert, une caravane de chameaux et de dromadaire fait route vers le sud. On compte 28 têtes et 48 bosses. Combien y a-t-il de dromadaires et de chameaux ?

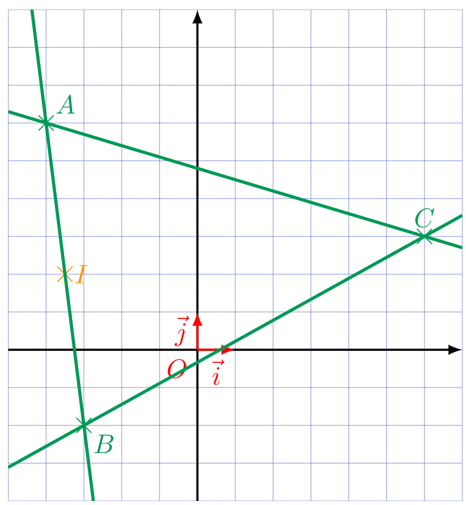
Exercice n° 58. Un chocolatier souhaite proposer une nouvelle confection contenant 40% de cacao. Pour cela il prévoit de fondre du chocolat noir à 70% et du chocolat au lait à 20%. On note x et y les masses respectives de chocolat noir et au lait nécessaires à la préparation d'un kilo de préparation.

1. Justifier que le couple $(x; y)$ vérifie le système :

$$\begin{cases} 0,7x + 0,2y = 0,4(x + y) \\ x + y = 1 \end{cases}$$

2. Résoudre le système et conclure.

Exercice n° 59. Dans le repère orthonormé ci-dessous, I est le milieu du segment $[AB]$.



1. Déterminer une équation de chacune des droites (AB) et (BC).

2. Déterminer une équation de la droite Δ parallèle à (BC) passant par I.

3. Calculer les coordonnées du point d'intersection J des droites Δ et (AC). Que représente ce point pour le segment $[AC]$? Justifier.

