1 Rappels de calculs

1.1 Rationnels et irrationnels

Exercice nº 1.

1. Donner les valeurs exactes de $A = \dfrac{\sqrt{(-7)^2}}{\sqrt{7}}$ et $B = \sqrt{20}$

2. Ecrire $C = \sqrt{12} \times \sqrt{30}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux entiers, b étant le plus petit possible.

3. Ecrire $D = \sqrt{48} + 2\sqrt{75}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux entiers, b étant le plus petit possible.

4. Ecrire $E = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $F = \dfrac{2}{3\sqrt{6}}$; et $G = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ sans radical au dénominateur.

5. Calculer $\sqrt{8} + \sqrt{40}$.

Exercice nº 2. Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux entiers, b étant le plus petit possible :

$\mathbf{A} = \sqrt{12} + 5\sqrt{27} - \sqrt{3}$

$\mathbf{B} = \sqrt{180} + 3\sqrt{20} - 7\sqrt{125}$

Exercice nº 3. Effectuer les calculs suivants :

$\mathbf{A} = -\dfrac{13}{8} - \dfrac{5}{24}$

$\mathbf{C} = \dfrac{\frac{15}{4}}{\frac{21}{16}}$

$\mathbf{B} = \dfrac{24}{35} \times \dfrac{14}{36}$

$\mathbf{D} = \dfrac{5}{4} - \dfrac{7}{4} \times \dfrac{7}{8}$

Exercice nº 4. Calculer :

$\mathbf{A} = \dfrac{-63}{30} \times \dfrac{60}{-4}$

$\mathbf{C} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{\frac{7}{3} \times 8}{21}$

$\mathbf{B} = \dfrac{\dfrac{45}{18}}{12}$

$\mathbf{D} = \dfrac{\frac{5}{6} - \frac{5}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}$

Exercice nº 5.

1. Calculer $A = \dfrac{8}{3} - \dfrac{5}{3} \div \dfrac{20}{21}$, donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

2. Même question avec $B = \left(2 + \dfrac{2}{3}\right) \div \left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{3}\right)$.

3. Déterminer le plus petit ensemble de nombre qui contient A, de même avec B.

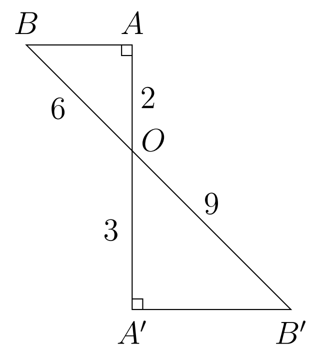
Exercice n° 6.

1. Calculer la valeur de $\dfrac{AB}{A'B'}$

2. En utilisant la définition d'une racine carrée écrire le résultat précédent sous la forme $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, où a et b sont des entiers positifs, $b \neq 0$.

3. Calculer AB puis, $A'B'$.

4. Comparer les deux écritures de $\dfrac{AB}{A'B'}$ et trouver un moyen de simplifier $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{72}}$.



1.2 Calcul littéral

Exercice n° 7. Factoriser les expressions suivantes :

a) $9x^2 - 24x + 16$

b) $6x^2 - 81$

c) $(x-1)^2 - 3$

d) $x^2 + 6x - 7$

e) $x^2 + 6x + 5$

f) $x^2 + x - 6$

Exercice n° 8. Ecrire sous forme canonique les trinômes suivants :

a) $x^2 + 6x - 8$

b) $2x^2 + 6x + 4$

c) $3x^2 + 12x + 12$

d) $-x^2 - 7x - 10$

racines de $ax^2 + bx + c$

On pose : $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$ le trinôme possède 2 racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$ le trinôme possède une racine double : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ le trinôme ne possède pas de racine.

Remarque. Si x_1 et x_2 sont les racines d'un trinôme $ax^2 + bx + c$, on peut noter :

$$S = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad P = x_1 x_2$$

Alors : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - Sx + P)$

Exercice n° 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^2 + 6x - 8 = 0$

b) $x^2 + 3\sqrt{2}x + 4 = 0$

c) $(2x - 5)^2 + 3 = 0$

d) $x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 1 + \sqrt{3} = 0$

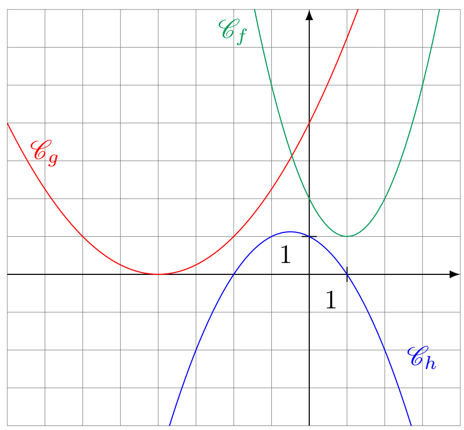
e) $x^3 - 8x^2 + 12x = 0$

f) $\sqrt{2}t^2 - 3t + \sqrt{2} = 0$

Exercice n° 10. Pour quelles valeurs de m l'équation ci-dessous admet-t-elle une racine double ? Calculer cette racine. Commentez.

$$x^2 - 4x + m + 1 = 0$$

Exercice n° 11. Trois fonctions polynômes du second degré sont représentées ci-dessous. Pour chacune, lorsque c'est possible, donner leur expression factorisée.



Exercice n° 12. En effectuant un changement de variable, résoudre les équations suivantes :

a) $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$

b) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$

Exercice n° 13. Le premier janvier 2019, Jean place 5000 € sur un livret épargne. Celui-ci est rémunéré à t % la première année, et à $(t - 0.5)$% la deuxième année. Le premier janvier 2021, Jean possède 5176,5 € sur ce compte, déterminer la valeur de t.

signe de $ax^2 + bx + c$

Le trinôme est du signe de a à *l'extérieur* des racines.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe opposé de a	0	signe de a	

Remarque. Si $\Delta \leq 0$ le trinôme est toujours du signe de a (éventuellement s'annule en x_0).

Exercice n° 14. Dresser un tableau de signe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$

b) $g(x) = 3x^2 - 4x + \dfrac{4}{3}$

Exercice n° 15. Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -42 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x + y = 18 \\ xy = 65 \end{cases}$$

Exercice n° 16. L'objectif des deux exercices suivants est de donner une méthode pour résoudre des équations de degré 3 de type $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (E), en se ramenant à une équation de la forme $x^3 + px + q = 0$.

1. u et v étant des réels développer $(u+v)^3$.

2. Montrer qu'en utilisant le changement de variable : $X = x + \dfrac{b}{3a} \Leftrightarrow x = X - \dfrac{b}{3a}$, on obtient à partir de l'équation (E) une équation de la forme : $X^3 + pX + q = 0$. On précisera les expressions de p et q en fonction de a, b, c, et d.

Exercice n° 17. La méthode de Cardan permet de résoudre une équation de degré 3 de la forme $x^3 + px + q = 0$ (E), pour p et q réels quelconques.

1. Soient u et v deux réels quelconques, montrer que :

$$(u+v)^3 - 3u \times v(u+v) - (u^3 + v^3) = 0$$

2. En posant le changement de variable $x = u + v$, on obtient l'équation (E') :

$$x^3 + 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$$

On cherche donc u et v tels que $u \times v = \dfrac{-p}{3}$ et $u^3 + v^3 = -q$.

On pose $\alpha = u^3$ et $\beta = v^3$, il reste alors à trouver α et β connaissant leur produit P et leur somme S.

$$P = \frac{-p^3}{27} \quad \text{et} \quad S = -q$$

3. Donner une équation dont α et β sont solutions.

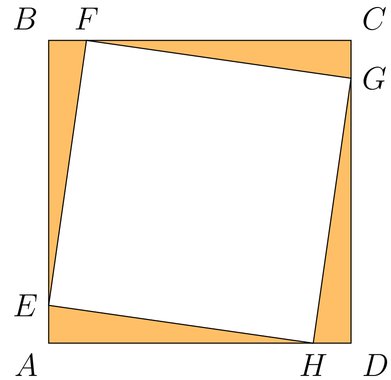
4. Déterminer en fonction de p et q le discriminant Δ de cette équation.

5. Dans le cas où $\Delta \geq 0$, donner, en fonction de p et q les solutions de cette équation.

6. En déduire une solution de (E).

7. Résoudre l'équation $x^3 - 36x - 91 = 0$. *On trouvera une solution x_0 grâce à la méthode de Cardan, puis on factorisera le polynôme par $(x - x_0)$*

Exercice n° 18. Soit $ABCD$ un carré de 5 cm de côté. E, F, G et H sont des points sur les côtés du carré tels que $AE = BF = CG = DH = x$. On admet que $EFGH$ est un carré.



1. Quelle est l'aire du quadrilatère $EFGH$?
2. Pour quelle valeur de x cette aire est-elle minimale ? Quelle est dans ce cas l'aire du carré ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de x cette aire est-elle égale à 14,12 cm^2 ?
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x cette aire est-elle inférieure ou égale à 13 cm^2 ?

2 Suites numériques

2.1 Généralités

Exercice n° 19. Pour les suites suivantes calculer les 6 premiers termes.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n+1}{2n-3}$

b) $\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \end{cases}$

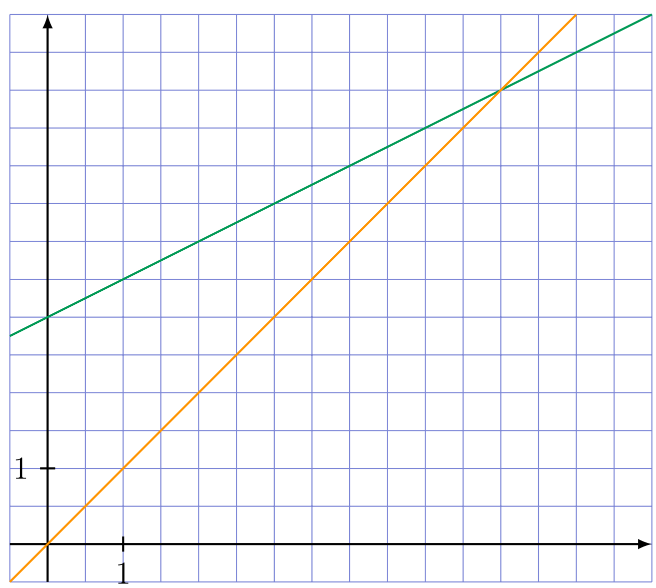
Exercice n° 20. Pour les suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$ exprimer u_{n-1} et u_{n+1} en fonction de n.

a) $u_n = 6n + 8$

b) $u_n = \dfrac{n(n+1)}{n+2}$

c) $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^n}$

Exercice n° 21. Dans un repère orthonormé, on a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,5x + 3$ et la droite d'équation $y = x$.



On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Sur la figure, représenter les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. Conjecturer le ses de variation de (u_n).
3. Conjecturer la limite de la suite.

Exercice n° 22.

```python
def u(n):
        u=1
        for i in range(10):
                u=(u-1)/(u-2)
        return u
```

On considère l'algorithme ci-contre définissant une suite (u_n) :

1. Que calcule cet algorithme ?
2. Ecrire une relation entre u_{n+1} et u_n.

2.2 Suites arithmétiques et géométriques

suite arithmétique

Une suite (u_n) de premier terme u_0 est arithmétique si il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.

Une suite (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

Somme de termes consécutifs : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$

$$S = \frac{(\text{nombre de termes})(1^{\text{er}}\ \text{terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

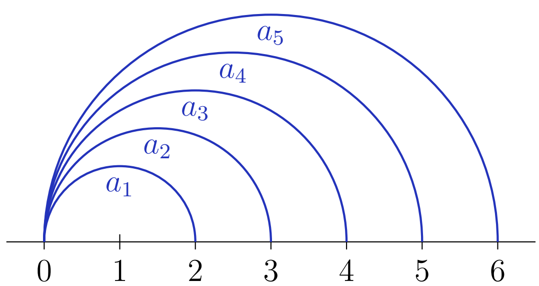
Exercice n° 23. Déterminer si les suites suivantes, définies sur $\mathbb{N}^*$, sont des suites arithmétiques. Si oui préciser leur premier terme et leur raison.

a) $u_n = 3n - 2$ **b)** $v_n = n^2 + 1$ **c)** $w_n = \dfrac{n^2+n}{n}$

Exercice n° 24. On donne deux termes d'une suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$. Déterminer la raison et le premier terme de la suite puis exprimez u_n en fonction de n.

a) $u_3 = 4$ et $u_8 = 24$ **b)** $u_5 = \dfrac{7}{4}$ et $u_9 = \dfrac{1}{4}$ **c)** $u_{13} = 16$ $u_{32} = -7$

Exercice n° 25. On construit des demi-disques comme sur la figure ci-dessous, l'unité étant le centimètre. On appelle a_n la longueur du demi-cercle correspondant de rang n



1. Exprimer a_n en fonction de n.
2. Prouver que la suite (a_n) est arithmétique, préciser sa raison et son premier terme.
3. Pourra-t-on obtenir un demi-cercle dont la longueur est supérieur à 25 cm ? Si oui à quelle étape. Vérifier votre réponse à l'aide d'un algorithme en python.

suite géométrique

Une suite (u_n) de premier terme u_0 est géométrique si il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = qu_n$.

Une suite est géométrique de premier terme u_0 et de raison q, si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n$.

Somme de termes consécutifs : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exercice n° 26. Les suites suivantes, définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ sont-elles géométriques ? Si oui donner leur raison et leur premier terme.

a) $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{5^n}$ **b)** $v_n = 7n - 2^n$ **c)** $w_n = (-9)^{2n}$

Exercice n° 27. Pour stoker des photos numériques, on utilise un algorithme de compression. On estime qu'à chaque niveau de compression, la taille diminue de 21,4 %.

La taille initiale d'une photo est de 4 Mo. On pose $T_0 = 4$ et pour tout entier naturel non nul, T_n désigne la taille de cette photo après une compression de niveau n.

1. Calculer T_1 et T_2.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ exprimer T_{n+1} en fonction de T_n. En déduire la nature de la suite (T_n).
3. Exprimer T_n en fonction de n.
4. Peut-on stroker 20 000 photos sur une clef usb de 32 Go ? Avec quelle compressions ?

Exercice n° 28. Calculer les sommes suivantes :

A $= 1 + 4 + 16 + \cdots + 262144$

C $= 2 + 6 + 18 + \cdots + 13122$

B $= 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{256}$

D $= 5 + 9 + 13 + \cdots + 45$

Exercice n° 29. Perrine place 8000€ sur un compte dont le taux d'intérêts cumulés est de 3,8%. Chaque année, 76€ de frais de gestion sont prélevés.

Pour tout entier n, on note C_n le capital de l'année n. On suppose que l'année 0 est l'année du premier dépot.

1. On cherche le capital dont disposera Perrine dans 10 ans.
   a) Etablir une relation de récurrence pour définir la suite C_n.
   b) Soit (D_n) la suite définie pour tout entier n par $D_n = C_n - 2000$. Quelle est la nature de cette suite ? Préciser ses caractéristiques.
   c) En déduire une expression de C_n en fonction de n et répondre au problème posé.
2. Combien d'années seront nécessaires pour que le capital de départ soit augmenté de 50% ?

Exercice n° 30. On empile des cannettes de soda pour former une pyramide. Combien d'étages peut-on dresser avec 91 cannettes ?

3 Probabilités

3.1 Propriétés importantes

Probabilités conditionnelles

Etant donné un univers probabilisé, et deux événements A et B. La probabilité que A se réalise sachant que B est réalisé est donné par la formule suivante :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exercice nº 31. A et B sont deux événements dont les probabilités sont données dans le tableau suivant :

	A	$\overline{A}$	Total
B		0,15	
$\overline{B}$			0,8
Total	0,7		1

1. Compléter le tableau.

2. En déduire $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

Exercice nº 32. Dans sa trousse Sophie a quinze crayons indiscernables au toucher. Cinq sont noirs, trois blancs, quatre rouges, et trois verts. Elle choisit au hasard un crayon.

1. Quelle est la probabilité qu'il soit noir ?

2. Quelle est la probabilité qu'elle choisisse un crayon vert sachant que l'événement « elle n'a pas tiré un crayon noir » est réalisé ?

Exercice nº 33. On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0,45$, $P(B) = 0,6)$ et $P(A \cup B) = 0,9$.

1. Calculer $P(A \cap B)$.

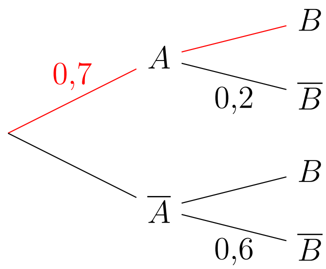
2. En déduire $P_B(A)$ et $P_A(B)$.

Probabilités totales

Etant donné un univers probabilisé, si la famille d'événements $\{A_1, \ldots, A_n\}$ forme une partition de l'univers et B est un événement fixé, alors :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

Exercice n° 34. On considère deux événement A et B dont les probabilités sont données dans l'arbre suivant :



1. Compléter l'arbre.

2. A quel événement correspond le chemin rouge ?

3. Calculer $P(B)$.

4. Calculer $P_B(A)$.

Exercice n° 35. Paul choisit un exercice pour se préparer au bac. S'il fait un exercice de géométrie sa probabilité de réussite est de 0,9. S'il se lance dans l'algèbre, sa probabilité de réussite est de à,45. Ne sachant pas par où commencer, il s'en remet aux probabilité. Pour s'encourager il souhaite avoir 80% de chances au moins de réussir son exercice.

Sachant cela quelle doit être la probabilité minimale que Paul choisisse un exercice de géométrie ?

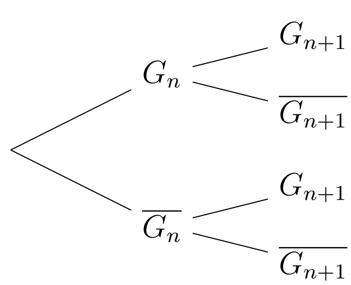
Exercice n° 36. Un jeu de hasard sur ordinateur est programmé de la façon suivante :

- si le joueur gagne un partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est de $\frac{1}{4}$;
- s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est de $\frac{1}{2}$;
- la probabilité de gagner la première partie est de $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier n non nul, on note G_n l'événement « la n^{e} partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet événement. On a donc : $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$

2. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en y inscrivant les bonnes probabilités.



3. Montrer que pour tout entier n non nul, $p_{n+1} = -0,25p_n + 0,5$

4. On définit pour tout entier n non nul la suite (u_n) par $u_n = p_n - 0,4$.

a) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, p_n = 0,4 - 0,15(-0,25)^{n-1}$.

c) La suite (p_n) semble-t-elle converger ? Si oui conjecturer sa limite.

Indépendance

Etant donné un univers probabilisé, deux événement A et B sont dit indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Exercice nº 37. Dans les cas suivants, dire si A et B sont indépendants :

1. $P(A) = 0,2,\ P(B) = 0,8$ et $P(A \cap B) = 0,2$

2. $P(A) = 0,4,\ P(B) = 0,8$ et $P(A \cap B) = 0,32$

3. $P(A) = 0,5,\ P(B) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,65$

Exercice nº 38. On tire un dé non truqué à 6 faces. Les événements A « le résultat est 4,5 ou 6 », et B « le résultat est paire » sont-ils indépendants ?

Exercice nº 39. Le cuisinier d'une colonie de vacances prépare des beignets : 30% sont à l'ananas et les autres sont aux pommes.

35% des beignets à l'ananas sont aromatisés à la cannelle ainsi que 45% des beignets aux pommes.

On choisit un beignet au hasard et on note A l'événement « le beignet est à l'ananas », et C l'événement « le beignet est aromatisé à la cannelle ».

A l'aide d'un arbre de probabilité discuter de l'indépendance des événements A et C.

Exercice nº 40. On considère deux événements A et B tels que : $P(A \cap B) = 0,8$ et $P(A \cup B) = 0,9$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 - 1,7x + ,8 = (x - 0,85)^2 + 0,0775$.

2. Montrer que A et B ne peuvent pas être indépendants.

3.2 Variable aléatoire

définition, loi de probabilité

Etant donné un univers probabilisé Ω, une variable aléatoire réelle X est une fonction définie sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}$

Définir la loi de probabilité de X, c'est donner pour chaque valeur x_i prise par X la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$, c'est à dire la somme des probabilités des issues de Ω qui ont pour image x_i par la fonction X.

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Exercice nº 41. Une urne contient 5 jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 5. On en tire trois simultanément. On appelle M la variable aléatoire qui associe au tirage le plus petit des trois nombres inscrit sur les jetons tirés.

1. Quelles sont les valeurs prises par M ?

2. Déterminer la loi de probabilité de M.

Exercice nº 42. Dans un club d'aviron, les adhérents peuvent choisir une formule d'entraînements uniquement le week-end ou le week-end et en semaine. Une autre formule existe pour pratiquer exclusivement en salle sans profiter des entraînements sur l'eau. Par ailleurs ils peuvent s'inscrire à des séances de fitness complémentaires.

La répartition des adhérents est donné ci-dessous :

	WE uniquement	Semaine et we	En salle	Total
Fitness	20		70	
Sans fitness		190		350
Total	150			450

1. Compléter le tableau ci-dessus.

2. Le prix à l'année est de 450€ pour la formule we uniquement, 505€ pour la formule sur 7 jours, et 400€ pour la pratique en salle. De plus l'inscription au fitness coûte 30€ par an supplémentaires.

On note X le montant des frais d'inscription payé par un adhérent choisi au hasard dans ce club d'aviron. Donner la loi de probabilité de X.

3.3 Indicateurs

Espérance, variance, écart-type

Etant donnée une variable aléatoire réelle X, l'espérance de X est :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$$

Sa variance est : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 \quad = E\big((X - E(X))^2\big)$.

Son écart-type est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exercice nº 43. Une roue est partagée en 10 secteurs angulaire égaux dont 5 sont colorés en rouge, 3 en vert et 2 en jaune. On tourne la roue et elle s'arrête au hasard sur un secteur angulaire. Si celui-ci est vert, on gagne 5€, s'il est jaune on gagne 20€ et s'il est rouge on perd 4€. X est la variable aléatoire donnant le gain (algébrique) de ce jeu.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer $E(X)$, $V(x)$ et $\sigma(X)$, interpréter.

Exercice nº 44. Astrid et Benoît ont chacun organisé une tombloa. Astrid propose 100 billets, dont 30 sont gagnants, parmi lesquels figurent un lot à 250€, quatre de 50€ et 25 de 2€.

Benoît propose également 100 billets dont 50 gagnants : cinq lots de 20€, dix lots de 15€, quinze lots de 10€ et vingt de 5€.

Astrid et Benoît vendent leurs tickets à 5€ l'unité. Quelle tombola choisiriez-vous ?

propriétés

L'espérance est linéaire : si a et b sont des réels fixés et X une variable aléatoire,

$$E(aX+b) = aE(X) = b$$

Formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Exercice nº 45. Dans une entreprise on augmente tous les salaires de 10€, comment évolue l'espérance ? Si on les augmentes de 10% comment l'espérance évolue-t-elle ?

4 Analyse

4.1 Dérivation

Exercice nº 46.

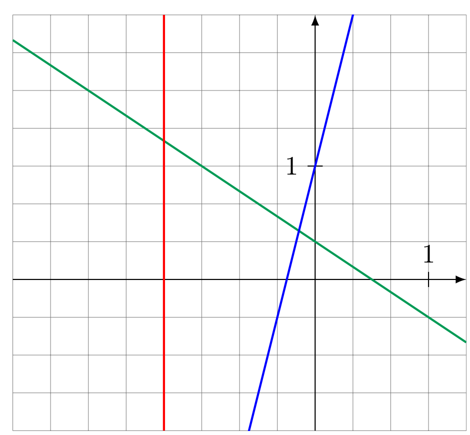
1. Déterminer la pente de chacune des droites ci-contre :

2. Tracer ci-contre, les droites d'équations :

a) $2x - 3y + 3 = 0$

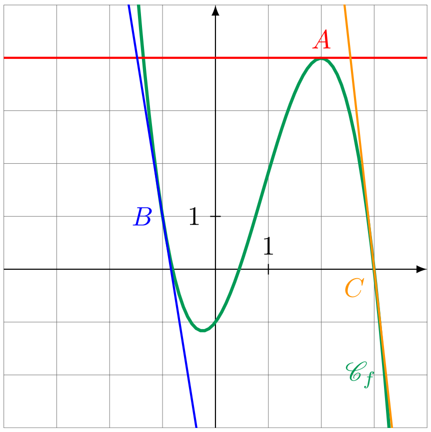
b) $y = -2x - \dfrac{4}{6}$

c) $-5y = -\dfrac{20}{3}$



Exercice nº 47.

On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, ainsi que trois de ses tangentes. On note respectivement T_A, T_B et T_C les tangentes à $\mathscr{C}_f$ en les points A, B et C.



1. Par lecture graphique déterminer l'équation de la tangente en A à $\mathscr{C}_f$

2. Sachant que la tangente en B passe par le point $(-2; \frac{29}{4})$, déterminer son équation réduite.

3. On donne $f'(3) = \frac{-102}{12}$, les tangentes, T_B et T_C sont-elles parallèles ?

tangente

Soit f une fonction, l'équation de la tangente à sa courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exercice n° 48. On considère la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 2x + 8$. D est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 4, et d la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point D.

1. Déterminer une équation réduite de d.

2. Déterminer les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de sa tangente d.

Exercice n° 49. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{x}$

1. Calculer $g'(2)$ et $g'(-2)$, en utilisant le taux de variation.

2. En déduire les équations réduites des tangentes à $\mathscr{C}_g$ aux points d'abscisses 2 et -2. Que remarque-t-on ?

3. Soit a un réel non nul, on appelle A le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse a et A' son symétrique par rapport à O. Montrer que les tangentes à $\mathscr{C}_g$ en ces deux points sont parallèles.

dérivées usuelles ; opérations

Fonction	Dérivée
$f(x)=k$	$f'(x)=0$
$f(x)=ax$	$f'(x)=a$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}=x^{-n}$	$f'(x)=\dfrac{-n}{x^{n+1}}$

Fonction	Dérivée
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$

Opération	Dérivée
Somme	$(u+v)'=u'+v'$
Produit scalaire	$(\lambda u)'=\lambda u'$
Produit	$(uv)'=u'v+v'u$
Inverse	$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=\dfrac{-u'}{u^2}$
Quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

Opération	Dérivée
Puissance	$(u^n)'=nu'u^{n-1}$
Racine	$\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
Exponentielle	$\left(e^u\right)'=u'e^u$
Composée	$f(ax+b)'=af'(ax+b)$

Exercice nº 50. Dériver les fonctions suivantes en précisant leur ensemble de dérivabilité.

a) $f(x)=x^3+4x^2+5x-6$

b) $g(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$

c) $h(x)=\sqrt{x}(x+1)$

d) $k(x)=\sqrt{x}(x^2-x+1)$

Exercice nº 51.

1. Calculer f' pour $f(x)=(2x+3)(1-4x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Développer et réduire f et calculer f' avec cette nouvelle expression.

3. Calculer g' pour $g(x)=(x^2-1)(x^3+1)$ sur $\mathbb{R}$.

4. Développer et réduire g et calculer g' avec cette nouvelle expression.

Exercice nº 52.

1. Calculer f' en précisant l'ensemble de dérivabilité. $f(x)=\dfrac{-2}{x^2+x+1}$

2. Calculer g' en précisant l'ensemble de dérivabilité. $g(x)=\dfrac{3-x}{1+4x}$

Exercice nº 53. Une particule physique évolue de façon rectiligne. Sa position x est définie au cours du temps t par la fonction : $x(t)=3t^2+9t+8$, où $x(t)$ exprime en mètres la distance parcourue au bout de t secondes. La vitesse en mètre par seconde est donnée par la fonction dérivée de la fonction x. On note $v(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$.

1. Quelle est la vitesse de la particule au temps $t=2$?

2. Quelle est la position de la particule lorsque $v(t)=10$?

4.2 Etude de fonctions

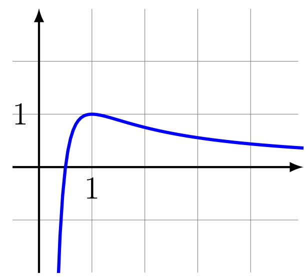
variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

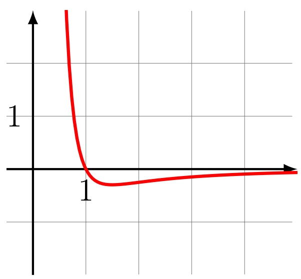
- Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I ;
- si $f' > 0$ sur I, alors f est croissante sur I ;
- si $f' < 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.

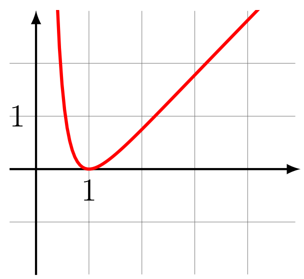
Exercice n° 54.

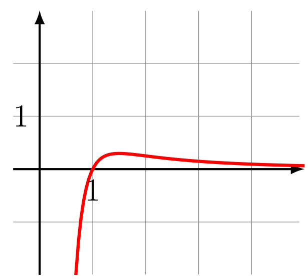
La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.



Parmi les trois courbes ci-dessous, laquelle est susceptible de représenter sa dérivée ?







Exercice n° 55. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$. Trouver un encadrement de f sur $[-2;2]$.

Exercice n° 56. Un laboratoire pharmaceutique développe un produit solide conditionné sous la forme d'un petit parallélépipède rectangle dont le volume est de 576 mm^3.

On note y la hauteur, la largeur et la longueur sont respectivement x et $2x$. Les grandeurs x et y sont exprimées en mm.

1. Calculer y en fonction de x.

2. Calculer la surface totale $S(x)$ en mm^2 de ce pavé droit en fonction de x.

3. x est nécessairement compris entre 3 et 12 mm. Etudier les variations de S en fonction de x. en déduire la valeur de x qui rend S minimale.

Exercice n° 57. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+2}$, on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 + 2x - 1$, et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative.

1. Donner l'ensemble de définition de f et étudier ses variations.

2. Même question pour g.

3. Etudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

4. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont tangentes en 0.

Exercice nº 58. Le triangle ABC est isocèle en A. Son périmètre est de 10 cm. On note $[AH]$ la hauteur issue de son sommet principal. On cherche à construire un tel triangle de façon à maximiser son aire.

On pose $BC = x$

1. Montrer que $0 \leq x < 5$

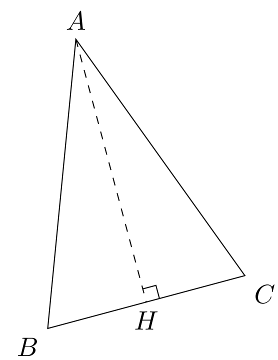
2. Exprimer AH en fonction de x.

3. En déduire que l'aire $\mathscr{A}$ du triangle est égale à :

$$\mathscr{A}(x) = \frac{x}{2}\sqrt{25 - 5x}$$

4. Justifier que $\mathscr{A}$ est dérivable sur un intervalle que l'on précisera, et déterminer pour tout x dans cet intervalle, $\mathscr{A}'(x)$.

5. En déduire valeur x solution de notre problème.



Exercice nº 59. Le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, pour produire q kilogrammes d'un produit cosmétique est donné par la fonction C définie sur $I = [1; 20]$ par :

$$C(q) = 4 + q + \frac{q^2}{4}$$

Le coût moyen de production $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$

Le coût marginal $C_m(q)$ pour une quantité fabriquée est égale à : $C_m(q) = C'(q)$.

1. Déterminer pour tout réel q de I, $C_M(q)$ et $C_m(q)$.

2. Etudier les variations de C_M et dresser un tableau de variation sur I.

3. L'affirmation suivante est-elle vraie ? « Lorsque le coût moyen est minimal, il est égale au coût marginal. »

Exercice nº 60. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{(2+x)^3}{2x^2}$

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

2. Combien la fonction f a-t-elle d'extremum locaux ?

3. Justifier que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ en -2.

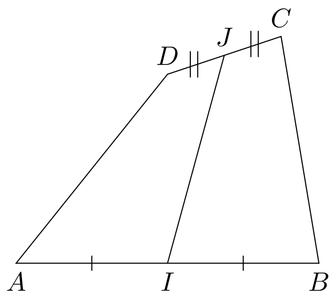
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

5. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.

5 Géométrie vectorielle

5.1 Rappel

Exercice n° 61.



$ABCD$ est un quadrilatère quelconque les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$ sont I et J.

1. Ecrire $\overrightarrow{IJ}$ comme la somme de $\overrightarrow{AD}$ et de deux autres vecteurs que l'on précisera.
2. Décomposer de même $\overrightarrow{IJ}$ en utilisant $\overrightarrow{BC}$.
3. En déduire que : $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

déterminant

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, leur déterminant est le nombre tel que :

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si : $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$.

Exercice n° 62. Dans chacun des cas, les points sont-ils alignés ?

a) $A(-1;1)$; $B\Big(1;2\Big)$; $C\left(-\dfrac{3}{7};\dfrac{7}{6}\right)$

b) $A\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{-1}{2}\right)$; $B\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right)$; $C\left(\dfrac{-1}{2};-1\right)$

Exercice n° 63. On veut démontrer la propriété suivante : « Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul. »

1. On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Démontrer que : $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$.
2. On suppose maintenant que $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$.
   a) Si l'une au moins des coordonnées de $\vec{u}$ ou de $\vec{v}$ est nulle, montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
   b) Si aucune des coordonnées n'est nulle, montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

5.2 Produit scalaire

Angle et projeté orthogonal

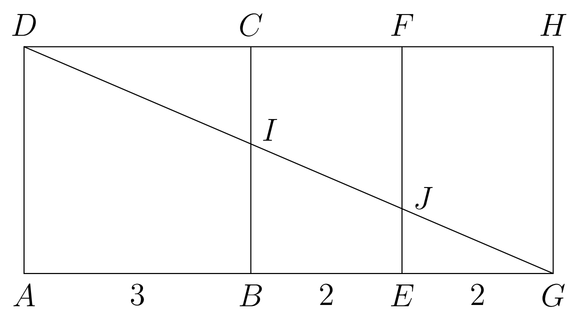
On appelle *produit scalaire* de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$$

Si A, B et C sont trois points, H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors :

- ☞ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ *Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens.*
- ☞ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ *Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires.*

Exercice n° 64. Dans une unité de longueur donnée, on considère un rectangle $ABCD$ de longueur 3, accolé à deux rectangles identiques $BEFC$ et $EGHF$ de longueur 2.



Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ **c)** $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AG}$ **e)** $\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{HG}$

b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF}$ **d)** $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{GD}$ **f)** $\overrightarrow{EJ}\cdot\overrightarrow{FA}$

Exercice n° 65. ABC est un triangle équilatéral de côté 8 cm. D est le milieu du segment $[AB]$.

1. Calculer la longueur CD.

2. Calculer les produits scalaires :

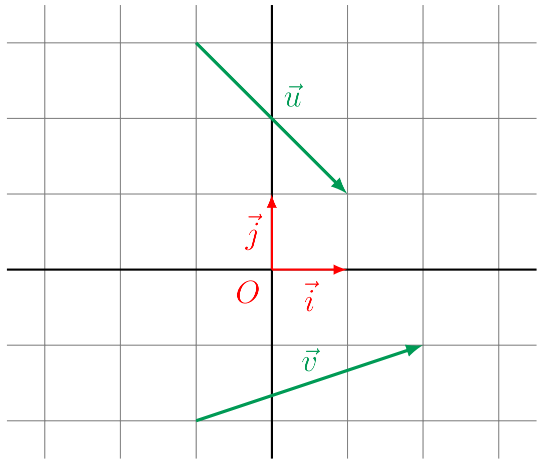
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}$ **c)** $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$

Avec les coordonnées

Dans un repère *orthonormé*, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$

Exercice n° 66. Déterminer graphiquement les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, puis calculer leur norme et leur produit scalaire. En déduire une valeur approchée de $\widehat{(\vec{u};\vec{v})}$.



Exercice n° 67. On donne les points suivants : $A(2;3)$; $B(1;-2)$; $C(-3;4)$. Déterminer la valeur approchée au centième en radian de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice n° 68. Dans un repère orthonormé, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\-4\end{pmatrix}$, calculer :

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$

b) $(3\vec{u})\cdot\vec{v}$

c) $(4\vec{u})\cdot(-2\vec{v})$

d) $\vec{u}\cdot(\sqrt{2}\vec{u}-\vec{v})$

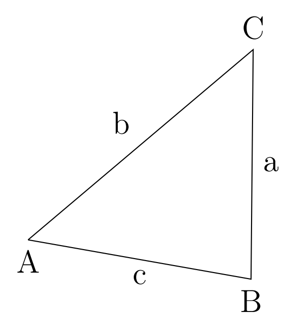
Propriétés

☞ $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{2}(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$

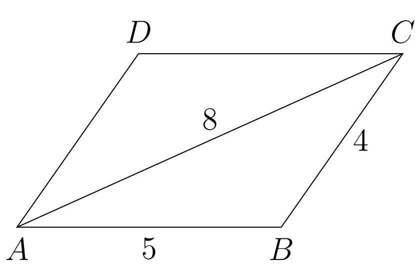
☞ $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$

☞ Formule d'Al Kashi :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\hat{A})$$



Exercice n° 69.



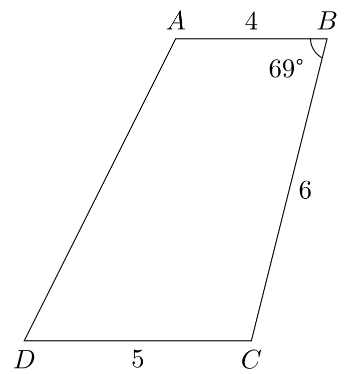
Dans le parallélogramme $ABCD$, calculer l'angle $\widehat{ABC}$:

1. En utilisant la formule d'Al-Kashi.

2. En utilisant la propriété des normes.

Exercice n° 70.

On considère le quadrilatère $ABCD$ tel que : $AB = 4$, $BC = 6$, $CD = 5$, $\widehat{ABC} = 69°$, et (AB) et (CD) sont parallèles.



1. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

2. Calculer AC

3. Calculer la valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{ACD}$.

Exercice n° 71. On applique deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ à un solide assimilé à un point O. On note $\overrightarrow{F}$ la résultante de ces deux forces.

1. Quel est le lien entre les forces $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$?

2. Sachant que $\overrightarrow{F_1} = 15$ N ; $\overrightarrow{F_2} = 13$ N et que $(\widehat{\overrightarrow{F_1}; \overrightarrow{F_2}}) = 40°$, déterminer l'intensité de la résultante $\left\|\overrightarrow{F}\right\|$. Arrondir au dixième.

Exercice n° 72. On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 7$ et $AD = 3$. Les points H et K sont les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur la diagonale $[BD]$

1. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ en fonction de HK en utilisant les projections.

2. En utilisant $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$, calculer autrement ce même produit scalaire.

3. En déduire la valeur exacte de la longueur HK.

Exercice n° 73. On considère un carré $ABCD$ de côté 1 et un point M quelconque sur le segment $[BD]$. On construit les projetés orthogonaux H et K du point M respectivement sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$.

1. On veut démontrer que les droites (CK) et (DH) sont perpendiculaires de deux façons :

- **a)** En introduisant le repère $(A; B; D)$.
- **b)** En calculant $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{DH}$ et en utilisant la relation de Chasles.

2. Démontrer que les longueurs CK et DH sont égales :

- **a)** avec les coordonnées
- **b)** sans les coordonnées.

Exercice n° 74. On considère un segment $[AB]$ de longueur 2 et de milieu le point I.

1. Déterminer l'ensemble des points L tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 3$

2. Exprimer $MA^2 + MB^2$ en fonction de MI.

3. En déduire l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 10$.

4. Comparer les ensembles obtenus.

6 Fonctions exponentielle

6.1 Généralités

définition & propriétés

La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

- ☞ $\exp(0) = 1$
- ☞ $\exp(1) = e$
- ☞ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$

- ☞ $e^{a+b} = e^a e^b$
- ☞ $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$

Exercice nº 75. Déterminer une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $g' = g$ et $g(0) = \dfrac{3}{2}$

Exercice nº 76. On souhaite montrer que pour tous réels x et y, $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.

1. Ecrire $\dfrac{e^x}{e^y}$ sous la forme d'un produit.

2. Sachant que $e^x \times e^y = e^{x+y}$ et que $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, montrer la proposition.

Exercice nº 77. Calculer autant que possible pour simplifier l'expression.

a) $e^3 \times e^5 \times e^{-7}$

b) $\dfrac{e^9}{e^{-4}}$

c) $\dfrac{e^{-3} \times e^8}{e^3}$

d) $\dfrac{\left(e^7\right)^3 \times e^{12}}{e^{-4}}$

Exercice nº 78. Soit x un réel quelconque, simplifier autant que possible les expressions suivantes :

a) $f(x) = e^{2x} \times \left(e^x\right)^2 \times e^{-3x}$

b) $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x}$

c) $h(x) = \dfrac{e^{3x}}{\left(e^{-x}\right)^2 \times e^x}$

d) $l(x) = \dfrac{e^{-2x+1} \times e^{6x+5}}{e^{-4x-2}}$

Exercice nº 79. Factoriser les expressions suivantes :

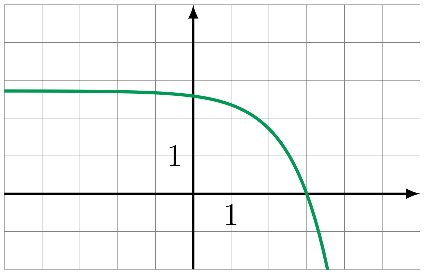
a) $e^{4x} + e^x$

b) $e^{4x} - 1$

c) $e^{6x} + 4e^{3x} + 4$

d) $9e^{-2x} - 6 + e^{2x}$

Exercice nº 80. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e - e^{x-2}$. Sa courbe représentative est tracée dans le repère ci-dessous.



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$, puis retrouver le résultat par le calcul.

2. Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) > e$, et contrôler ce résultat graphiquement.

Exercice nº 81. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $(x+1)e^{x-2} = 0$ **d)** $xe^{x+3} = 2e^{x+3}$ **g)** $e^{x^2} > 1$

b) $e^{3x+1} = -2$ **e)** $-e^{3x} > 0$ **h)** $3x^2e^{x+1} - 3e^{x+1} \leq 0$

c) $e^x(e^{x-2} - 1) = 0$ **f)** $e^{x^2+5x} - e^6 < 0$ **i)** $(e^x - 1)e^x > e^x - 1$

6.2 Etude de fonction

Exercice nº 82. Donner le domaine de définition, et dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2e^{-x} + 5x^4 - 3e^2$ **c)** $f(x) = -6e^{2x+5}$

b) $f(x) = (x^2 + 3x - 1)e^x$ **d)** $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

Exercice nº 83. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1. Montrer que la courbe représentative de la fonction h admet un centre de symétrie.
2. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que h vérifie l'équation : $h' = 1 - h^2$.

Exercice nº 84. On a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $I = [0; 25]$ par $f(x) = (ax+b)e^{-0,2x}$ où a et b sont deux réels. On a également représenté la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point $A(0; 7)$. T passe par le point $B(2; 14,2)$.

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 6$
2. **a)** Par lecture graphique donner $f(0)$
   b) Ecrire $f(0)$ en fonction de a et b.
   c) en déduire que sur I, $f(x) = (ax+7)e^{-0,2x}$
3. **a)** Quel est le coefficient directeur de T ?
   b) Exprimer pour tout $x \in I$, $f'(x)$ en fonction de a.
   c) En déduire que :$\forall x \in I, f(x) = (5x+7)e^{-0,2x}$.
4. Déterminer le maximum de f sur I.