Sport d'hiver seconde

1 Le point en calcul

1.1 Nombres rationnels

Simplifier une fraction

Simplifier une fraction c'est diviser son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

Exemple : $\dfrac{25}{15} = \dfrac{25 \div 5}{15 \div 5} = \dfrac{5}{3}$ ou $\dfrac{25}{15} = \dfrac{\cancel{5} \times 5}{\cancel{5} \times 3} = \dfrac{5}{3}$

a) $\dfrac{12}{20}$ b) $\dfrac{-49}{56}$ c) $-\dfrac{13}{-26}$ d) $-\dfrac{28}{32}$

Astuce : Pour simplifier de façon rapide et efficace une fraction, penser à décomposer son numérateur et son dénominateur en produit de facteurs premiers.

e) $\dfrac{120}{105}$ f) $\dfrac{196}{182}$ g) $\dfrac{594}{648}$ h) $\dfrac{888}{962}$

Exercice nº 1.

1. Décomposer 800 et 650 en produit de facteurs premiers.

2. Simplifier la fraction $\dfrac{650}{800}$.

Exercice nº 2. Calculer les expressions suivantes :

$\text{A} = 2^4 \times 2^{-3}$

$\text{B} = 8^2 \times 8^{-3} \times 8^7$

$\text{C} = 11^{-8} \times \dfrac{11^7}{11^{-4}}$

$\text{D} = \dfrac{(-3)^6 \times (-3)^{-8}}{(-3)^{-7}}$

$\text{E} = \dfrac{12 \times 10^4 \times 5 \times 10^4}{15 \times 10^2 \times 2 \times 10^2}$

$\text{F} = \dfrac{-5^7 \times (-5)^4}{(-5)^6 \times 5^{-3}}$

Somme de fractions

a) $\dfrac{7}{4}$ et $\dfrac{5}{8}$ b) $\dfrac{-7}{12}$ et $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{2}{7}$

Astuce : Pour réduire au même dénominateur deux fractions, on cherche le ppcm de leurs dénominateurs. On peut s'aider des décompositions en produit de facteurs premiers.

d) $\dfrac{9}{70}$ et $\dfrac{13}{20}$ e) $\dfrac{63}{38}$ et $\dfrac{22}{95}$

Pour additionner ou soustraire deux fractions, elles doivent être au même dénominateur.
Si a, b et c sont trois nombres ($c \neq 0$) alors, $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{a+b}{c}$.

Exercice n° 3. Trouver le plus petit dénominateur commun possible, puis calculer les sommes.

a) $\dfrac{5}{4} + \dfrac{7}{6}$ c) $\dfrac{6}{35} + \dfrac{8}{15}$ e) $\dfrac{4}{19} - \dfrac{7}{20}$

b) $\dfrac{13}{8} + \dfrac{5}{24}$ d) $\dfrac{3}{16} - \dfrac{7}{12}$ f) $\dfrac{3}{10} + \dfrac{11}{4}$

Exercice n° 4.

1. Simplifier la fraction $\dfrac{2261}{323}$
2. Calculer la somme : $\dfrac{2261}{323} + \dfrac{7}{49}$

Exercice n° 5. Effectuer les calculs suivants en donnant le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{85}{4} + \dfrac{25}{-5}$ c) $\dfrac{42}{75} - \left(-\dfrac{22}{30}\right)$

b) $\dfrac{-1}{25} - 8$ d) $-\dfrac{14}{27} + \dfrac{-5}{108}$

Exercice n° 6. Anne-Cécile rend visite à ses amis, ceux-ci, attentionnés lui offrent à chaque fois une part son gâteau préféré. Le premier jours, elle mange un demi gâteau chez Sophie. Le lendemain, Marie lui en donne un quart. Le troisième jours, elle prend seulement un huitième de gâteau chez Jacques. Enfin, avec Franck, elle ne mange qu'un seizième de gâteau et le cinquième jour, elle ne prend qu'un trente-deuxième de gâteau chez Elsa pour lui faire plaisir.

1. Quelle proportion de gâteau a-t-elle mangée en cinq jours ?
2. En continuant ainsi parviendra-t-elle à manger un gâteau entier ?

Multiplier des fractions

Pour multiplier deux fractions on multiplie les numérateurs entre eux, et les dénominateurs entre eux, *après avoir simplifié le plus possible.*

Exemple : $\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{2 \times 3}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$

- ☞ On applique la règle des signes ;
- ☞ on décompose en produit de facteurs ;
- ☞ on simplifie ;
- ☞ on calcule.

$$\frac{-9}{10} \times \frac{5}{36} = -\frac{9}{10} \times \frac{5}{36}$$
$$= -\frac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 2 \times 2}$$
$$= -\frac{1}{8}$$

a) $-\frac{7}{4} \times (-5) \times \frac{-8}{21}$ b) $\frac{-45}{64} \times \frac{24}{-27}$ c) $\frac{154}{525} \times 45$

Exercice n° 7. Calculer et donner les résultats sous forme d'une fraction irréductible.

a) $7 \times \frac{3}{7}$

b) $\frac{5}{-8} \times \frac{8}{5}$

c) $\frac{-2}{3} \times \frac{-5}{2} \times \frac{3}{7}$

d) $\frac{12}{35} \times \frac{-49}{45}$

Exercice n° 8. Marcel se coupe un tiers de tarte, change d'avis et prend la moitié de cette part, et comme cela fait encore trop, prend les $\frac{3}{5}$ de la nouvelle part. Quelle fraction de la tarte va-t-il finalement manger ?

Exercice n° 9. Le train Paris-Marseille part de la gare de Marseille avec 800 passagers. Un quart d'entre eux voyagent en 1$^{\text{ère}}$ classe et le reste en 2$^{\text{de}}$ classe.

Les trois huitième des passagers de la 1$^{\text{ère}}$ classe et le sixième des passagers de la 2$^{\text{de}}$ classe descendent à Lyon.

1. Au départ de Marseille, quel est le nombre de passagers en 1$^{\text{ère}}$ classe ? En 2$^{\text{de}}$ classe ?
2. En déduire le nombre de personnes de chaque catégorie qui descendent à Lyon.
3. Exprimer à l'aide d'une fraction simplifiée la proportion des passagers de 1$^{\text{ère}}$ classe puis de ceux de 2$^{\text{nd}}$ classe descendant à Lyon par rapport au total des voyageurs.

Slogan !

« Diviser, c'est multiplier par l'inverse ! »

Exercice n° 10. Calculer les expressions suivantes :

$A = \frac{1}{5} \times \frac{-4}{3} + \frac{7}{2}$

$B = \frac{13}{7} + \left(-\frac{8}{7}\right) \div \left(-\frac{4}{5}\right)$

$C = -\frac{3}{8} - \frac{5}{8} \times \frac{7}{9}$

D $\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{4} - \frac{4}{3}\right)$

Exercice n° 11. Calculer puis simplifier au maximum.

$$A = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}} \qquad B = 2 + \frac{\frac{2}{7}}{\frac{5}{14}} \qquad C = \frac{3 - \frac{7}{5}}{1 - \frac{9}{10}}$$

1.2 Nombres irrationnels

Racines carrées

Si a est un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif tel que $(\sqrt{a})^2 = a$.

☞ $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{a^2} = |a|$

☞ Pour tout réel a et b positifs $(b \neq 0)$: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exercice n° 12. Montrer que les nombres suivants sont entiers.

a) $\sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{25}$

b) $2\sqrt{2^2}$

c) $\sqrt{(-4)^2}$

d) $\sqrt{49}$

Exercice n° 13. Calculer en écrivant le résultat sous forme $\sqrt{a}$

a) $3\sqrt{5}$ b) $\frac{\sqrt{18}}{2}$ c) $2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{7}$

Exercice n° 14.

1. Ecrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{2}$ où a est un entiers.

   a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt{50}$ c) $\sqrt{72}$

2. Calculer l'expression : $A = 3\sqrt{32} - 12\sqrt{50} + 8\sqrt{72}$

Exercice n° 15. Ecrire les quotients suivants avec un dénominateur entier.

a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{7}{2\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ d) $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$

Exercice n° 16. Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux entiers relatifs et de sorte que b soit le plus petit possible.

$A = \sqrt{50} + 4\sqrt{18} - 7\sqrt{8}$

$B = \sqrt{20} - 8\sqrt{45} + 2\sqrt{5}$

$C = \sqrt{12} + \sqrt{75} + 4\sqrt{300}$

$D = 5\sqrt{63} - \sqrt{28} + \sqrt{7}$

Exercice n° 17. Développer et réduire :

$A = (5 + \sqrt{15})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$

$B = (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{10} - 1)$

2 Calcul littéral

2.1 Développer

Développer

Développer, c'est transformer un produit en somme.

$$\overrightarrow{k \times (a+b) = ka + kb}^{\text{développer}}$$

Exemple : $5(3-2y) = 15 - 10y$

a) $3x(6+x)$

b) $-5(7y+2)$

c) $3x - 4(x-2)$

d) $x(8-9x)$

e) $-9x(-2x+1)$

f) $(3x-12)(-4x+9)$

Exercice n° 18. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$\text{A} = (2x-3)(x+6)$$
$$\text{B} = -(7-2x)(-x+7)$$
$$\text{C} = 2(-6z-1)(4z+1)$$
$$\text{D} = (5x-2)(5x+2)$$
$$\text{E} = (3x+4)^2$$
$$\text{F} = (x-7)^2$$
$$\text{G} = (-8x+3)^2$$
$$\text{H} = (-x\sqrt{2}-8)^2$$

Exercice n° 19. Développer et simplifier les expressions suivantes :

$$\text{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\text{B} = \sqrt{3}\left(2 - 5\sqrt{3}\right)$$
$$\text{C} = \sqrt{18}\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{18}}{18}\right)$$
$$\text{D} = 5\sqrt{2}(\sqrt{2} - 7\sqrt{18})$$

Identités remarquables

Pour tout réel a, et b :

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ \underbrace{(a+b)(a-b)}_{\text{forme factorisée}} &= \underbrace{a^2 - b^2}_{\text{forme développée}} \end{aligned}$$

Exercice n° 20. Développer et réduire les expressions :

$$A = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y\right)^2 \qquad C = \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}y\right)^2 - (x-y)^2$$

$$B = \left(\frac{2}{3}a + \frac{4}{5}b\right)^2 \qquad D = \left(\frac{3}{4}x + \frac{5}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\right)$$

Exercice n° 21. Ecrire sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

a) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{3}{x}$ b) $\dfrac{2x+4}{x-2} + \dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{4}{x-4} - \dfrac{3}{x+1}$

2.2 Factoriser

Factoriser

Factoriser une expression, c'est transformer une somme en produit.

$$k \times (a+b) = ka + kb$$
$$\xleftarrow{\text{factoriser}}$$

Exemple : $5x - 75 = 5(x - 15)$

---

a) $5x^2 - 4x$ b) $4ab^3 - 10a^2b^2 + 6a^3b^2$

Exercice n° 22. Factoriser les expressions suivantes :

$A = (3x+1)(7x-2) + (3x+1)^2$

$B = (7x-3)^2 - 3$

$C = x^2 - 10x + 25$

$D = 7x^2 + 14x + 7$

$E = 6(x^2 - 49)$

$F = \dfrac{1}{4}x^2 - 1$

$G = \sqrt{x}(x+4) + \sqrt{x}(3x+9)$

$H = -22x + 121x^2 + 1$

Exercice n° 23. Factoriser les expressions suivantes :

$A = 25x^2 - 16 - (5x+4)(-x+7)$

$B = (2x-3)(x+5) - 4x^2 + 9$

$C = (6x - \sqrt{3})(x - 3\sqrt{3}) + 36x^2 - 3$

Exercice n° 24.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x+1)^2 - (x-2)^2$$

   a. Déterminer la forme développée de f ;
   b. Déterminer la forme factorisée de f.

2. En choisissant la forme la plus adaptée répondre aux questions suivantes :

   a. Calculer les images par f de 0 et $\sqrt{2}$;
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -3$;
   c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$;
   d. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x + 3$.

2.3 Equations

Produit nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $2x^2 = 9$

b) $4(x-3)(5x+2) - (x^2-9) = 0$

c) $-x^2 + 4x = 3$

d) $x^2 + 3x = -2x - 6$

Exercice nº 25. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $(5x-2)(7x+6) = 0$

b) $x(6x+5) = 0$

c) $(3x+4)^2 = 0$

d) $25x^2 - 60x + 25 = -11$

Exercice nº 26. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\dfrac{2x-3}{x+1} = 4$

b) $\dfrac{(2x-5)^2 - (3x-1)^2}{x(x+4)} = 0$

c) $\dfrac{x}{x+2} - 2 = \dfrac{-x+4}{x}$

d) $\dfrac{1}{x-3} = \dfrac{x+1}{x+2} - 1$

Exercice nº 27. On étudie dans une boîte de pétrie l'évolution d'une population de bactéries. Son nombre en milliers est donné, pour les dix premiers jours, par la formule $N(t) = (0,5t+1)^2$ pour tout réel $t \in [0;10]$.

1. Donner une estimation du nombre de bactéries au bout d'un jour.
2. Au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il atteint 16 000 ?

Modéliser un problème

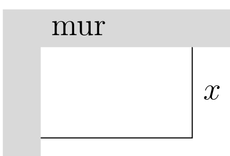
- ☞ On choisit l'inconnue ;
- ☞ on traduit le problème par une équation ou une inéquation ;
- ☞ on résout l'équation ou l'inéquation ;
- ☞ on vérifie que le ou les résultats sont bien des solutions du problème.

---

a) Trouver trois nombres entiers consécutifs dont la somme soit égale à 2019.

b) Un père de 41 ans a trois enfants âgés de 6 ans, 9 ans, et 12 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal à la somme des âges de ses enfants ?

Exercice nº 28.



Jean souhaite poser un grillage au fond de son jardin pour créer un enclos. Il possède 12 mètres de grillage. On note x la largeur de l'enclos. La surface souhaité de l'enclos est de 27 m^2.

1. Montrer que le problème se traduit par l'équation : $-x^2 + 12x - 27 = 0$
2. Résoudre le problème de Jean.

2.4 Inéquations

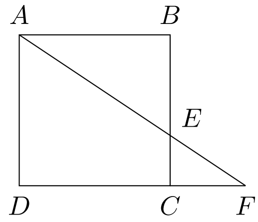
Exercice n° 29. Résoudre les inéquations suivantes :

a) $4x + 7 < x - 8$

b) $4(x-2) + 7 \leq 18x - 4(x+7)$

c) $\dfrac{x+8}{2} - \dfrac{5x-2}{6} \geq \dfrac{7x-4}{5}$

Exercice n° 30.



$ABCD$ est un carré de côté 8. E est un point mobile du segment $[BC]$. La droite (AE) coupe la droite (CD) en F. Déterminer les positions de E pour lesquelles $CF \leq 4$.

Exercice n° 31. a et b désignent deux nombres réels positifs.

1. Développer $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$;

2. Justifier que $a - \sqrt{a}\sqrt{b} + b \geq 0$

3. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

   Pour tout nombre réels positifs a et b, $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

4. x, y et z sont trois réels positifs. Montrer que :

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

tableau de signe

Pour étudier le signe d'un produit, on étudie le signe de chacun de ses facteurs.

Etude du signe de $h(x) = \dfrac{3x-5}{2x+7}$

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x - 5$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x + 7$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

Exercice n° 32.

1. Etudier le signe de $(x-2)(-2x+3)$ pour $x \in \mathbb{R}$

2. En déduire les solutions de $(x-2)(-2x+3) > 0$

3. De la même façon résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x^2 - 6x \leq 0$

3 Fonctions

Exercice n° 33. Une entreprise publicitaire monte une campagne pour la promotion d'un smartphone. Après x semaines de publicité, le pourcentage de personnes connaissant le nouveau modèle est donné par la fonction f suivante :

$$f(x) = \frac{90x}{x+1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de cette fonction ;
2. Déterminer le pourcentage de personne connaissant le nouveau modèle de téléphone après 5 semaines de publicité ;
3. Déterminer le pourcentage de personnes ne connaissant pas le nouveau téléphone après 9 semaines de publicité ;
4. Est-il vrai qu'après 20 semaines de publicité, tout le monde connaît le nouveau téléphone ?
5. On souhaite étudier la fonction sur l'intervalle $[0; 15]$.
   a. A l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0; 15]$;
   b. Déterminer graphiquement la durée nécessaire pour qu'au moins 60% de la population connaisse le nouveau modèle ;
   c. Déterminer combien de semaines supplémentaire sont nécessaire pour que ce pourcentage s'élève à 75% ;
   d. Le directeur arrête sa campagne après 8 semaines cela semble-t-il judicieux ?

Déterminer la parité

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$.

Pour montrer qu'elle est paire, il faut vérifier que :

- ☞ Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$;
- ☞ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.

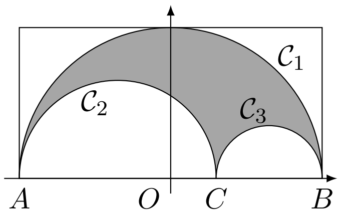
Pour montrer qu'elle est impaire, il faut vérifier que :

- ☞ Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$;
- ☞ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Exemple : Montrer la parité des fonctions carré, inverse, racine carrée.

Remarque. La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, celle d'une fonction impaire par rapport à l'origine du repère.

Exercice n° 34. Dans un repère orthonormé d'origine O, A et B sont des points de coordonnées $(-1;0)$ et $(1;0)$. C est un point du segment $[AB]$ d'abscisse x. $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, et $\mathcal{C}_3$, sont des demi-cercles de diamètres respectifs $[AB]$, $[AC]$ et $[CB]$. On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de la partie grisée.



1. En observant la figure, déterminer la parité de la fonction $\mathcal{A}$
2. a. Exprimer l'aire du demi-disque délimité par $\mathcal{C}_1$ et l'axe des abscisses ;
   b. Exprimer, en fonction de x, l'aire de chacun des demi-disques délimités par l'axe des abscisses, $\mathcal{C}_2$, et $\mathcal{C}_3$;
   c. En déduire que pour tout x de $[-1;1]$: $\mathcal{A}(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}(x^2+1)$
   d. Démontrer que $\mathcal{A}$ est paire.

Variations

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, on dit que :

- f est croissante sur I si pour tout $u \in I$ et $v \in I$ tels que $u \leq v$, $f(u) \leq f(v)$;
- f est décroissante sur I si pour tout $u \in I$ et $v \in I$ tels que $u \leq v$, $f(u) \geq f(v)$;
- f est constante sur I si pour tout $u \in I$ et $v \in I$, $f(u) = f(v)$.

Il faut savoir :

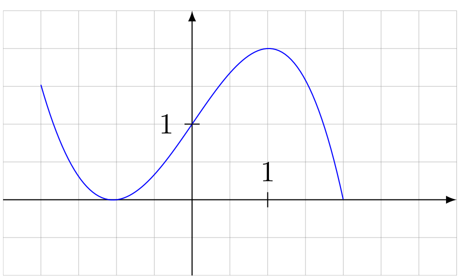
☞ Lire graphiquement les variations d'une fonction ;

☞ lire les variations d'une fonction dans un tableau de variation ;

☞ démontrer qu'une fonction est croissante ou décroissante sur un intervalle donné.

Exemple :

a) Décrire les variations de la fonction f sous la forme d'un tableau.



b) Etant donné le tableau de variation de la fonction g définie sur $[-8;4]$, comparer $g(-7)$ et $g(-1)$ d'une part, $g(1,5)$ et $g(3)$ d'antre part.

x	-8	1	4
$g(x)$	1 ↘	-2	↗ 3

c) Donner, en justifiant, les variations des fonctions carré, racine carré, et inverse. Dresser leur tableau de variation.

Exercice n° 35. Soit h la fonction définie sur $[0;4]$ par : $h(x) = -x^2 + 4x + 2$

1. Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $[0;4]$, $h(x) = -(x-2)^2 + 6$.
2. Déterminer alors le signe de $h(x) - h(2)$ sur l'intervalle $[0;4]$.
3. En déduire le maximum de h sur cet intervalle, préciser la valeur en laquelle il est atteint.

Exercice n° 36. $ABCD$ est un carré de 10 cm de côté. M est un point du segment $[AB]$. On construit à l'intérieur du carré $ABCD$ un carré $AMNP$ et un triangle MBO rectangle isocèle en O. On note x la longueur AM, en cm, et $\mathcal{A}(x)$ l'aire du domaine coloré, en cm^2.

1. A quel intervalle x appartient-il ?
2. Démontrer que $OM^2 = \dfrac{1}{2}(10-x)^2$.
3. En déduire l'expression de $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x.
4. Est-il possible de faire en sorte que l'aire du domaine colorié soit la plus grande possible ? La plus petite possible ? Si oui, dans quels cas ?